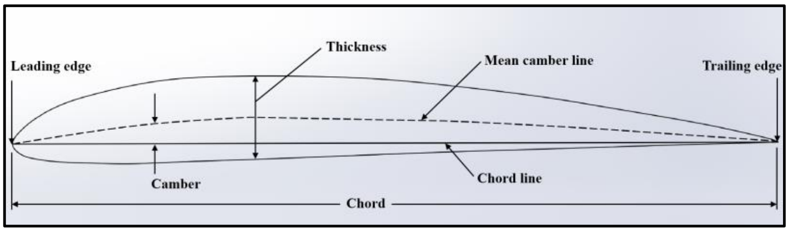
บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1.1 แพนอากาศ (Airfoil or Aerofoil)

แพนอากาศ (Airfoil หรือ Aerofoil) เป็นรูปทรงเพรียวบางชนิดหนึ่งที่มีพื้นผิวด้านบนโค้งมากกว่าพื้นผิวด้านล่าง แพนอากาศนี้ถูกออกแบบมาเพื่อสร้างแรงยกเมื่อมีอากาศไหลผ่าน จึงนิยมนำมาใช้เป็นองค์ประกอบพื้นฐานของใบพัดและปีกเครื่องบิน ปีกเครื่องบินเมื่อถูกตัดด้วยระนาบในแนวดิ่งขนานไปกับเส้นกึ่งกลางของอากาศยานจะเห็นเป็นลักษณะของภาพตัดขวางของปีกเครื่องบินซึ่งภาพตัดขวางนี้ เรียกว่า “แพนอากาศ (Airfoil)” แสดงดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 ส่วนประกอบของแพนอากาศ

ส่วนประกอบพื้นฐานของแพนอากาศมีดังนี้

1) ชายหน้า (Leading edge) คือ จุดปลายสุดฝั่งด้านหน้าที่สัมผัสกับกระแสอากาศเป็นลำดับแรกซึ่งมีบทบาทสำคัญในการเปลี่ยนเส้นทางการเคลื่อนที่ของอากาศทำให้อากาศแยกออกจากกันไปในบริเวณด้านบนและด้านล่างแพนอากาศ โดยปกติแล้วชายหน้าจะโค้งมนเพื่อลดแรงต้านอากาศ

2) ชายหลัง (Trailing edge) คือ จุดปลายสุดฝั่งด้านหลังของแพนอากาศที่มีหน้าที่ควบคุมพฤติกรรมการไหลที่แยกจากกันบนแพนอากาศให้มาบรรจบกันเมื่อสิ้นสุดการไหลผ่านแพนอากาศ ซึ่งมีอิทธิพลต่อแรงยก แรงต้าน และคุณลักษณะทางอากาศพลศาสตร์อื่นๆ

3) คอร์ด (Chord) คือ ความกว้างของแพนอากาศที่วัดจากชายหน้าถึงชายหลังแบบเป็นเส้นตรง ซึ่งความยาวของคอร์ดเป็นตัวแปรสำคัญในการกำหนดลักษณะแรงยก และแรงต้านของแพนอากาศ

4) เส้นคอร์ด (Chord line) คือ เส้นตรงสมมติจากชายหน้าถึงชายหลังที่ใช้ในการอ้างอิงมุมปะทะและตัวแปรทางอากาศพลศาสตร์อื่นๆของปีกเครื่องบิน โดยมุมระหว่างเส้นคอร์ดและทิศทางการไหลของอากาศ เรียกว่า มุมปะทะ (Angle of Attack, AoA)

5) ค่าแคมเบอร์ (Camber) คือ ค่าความโค้งของพื้นผิวด้านบนและด้านล่างของแพนอากาศซึ่งมีอิทธิพลต่อแรงยกเนื่องจากส่งผลต่อการกระจายตัวของแรงดันรอบๆแพนอากาศ โดยปกติแล้วผิวบนมักจะมีความโค้งมากกว่าผิวด้านล่างเรียกว่า positive camber แต่หากผิวด้านล่างมีความโค้งมากกว่าผิวด้านบนเรียกว่า negative camber และเมื่อผิวด้านบนและผิวด้านล่างของแพนอากาศมีความโค้งเท่ากัน จะเรียกแพนอากาศประเภทนี้ว่า symmetry airfoil

6) เส้นแคมเบอร์ (Mean camber line) คือ เส้นโค้งสมมติที่อยู่ตรงกลางระหว่างพื้นผิวด้านบนและพื้นผิวด้านล่างของแพนอากาศยาน โดยระยะห่างจากเส้นแคมเบอร์กับพื้นผิวด้านบนจะเท่ากับพื้นผิวด้านล่างในทุก ๆ จุด

7) ตำแหน่งแคมเบอร์ (Camber position) คือ ตำแหน่งตามแนวเส้นคอร์ดที่มีค่าแคมเบอร์สูงสุด โดยทั่วไปจะแสดงค่าเป็นแบบร้อยละของความยาวคอร์ดเมื่อวัดจากชายหน้าของแพนอากาศ เมื่อตำแหน่งของแคมเบอร์เปลี่ยนจะส่งผลให้ลักษณะของแรงยกและแรงต้านเปลี่ยนแปลงตามไปด้วย

8) ความหนา (Thickness) คือ ระยะห่างระหว่างผิวด้านบนและด้านล่างโดยมักจะแสดงเป็นค่าร้อยละของความยาวคอร์ด (Abbott et al., 2012)

แพนอากาศ NACA เป็นแพนอากาศสำหรับเครื่องบินที่ถูกพัฒนามาจากคณะกรรมการที่ปรึกษาด้านการบินแห่งชาติ (National Advisory Committee for Aeronautics, NACA) โดยแพนอากาศ NACA จะมีตัวเลขระบุตามหลังเป็นหมายเลขรุ่นตั้งแต่ 4 ถึง 8 หลัก เพื่อเป็นการบ่งบอกรูปร่างของแพนอากาศซึ่งตัวเลขแต่ละตำแหน่งนั้นจะมีความหมายแตกต่างกันไป เช่น

รุ่น 4 หลัก ตัวเลขหลักที่ 1 หมายถึงความโค้งสูงที่สุดของเส้นแคมเบอร์เมื่อเทียบกับเส้นคอร์ดเป็นร้อยละ ตัวเลขหลักที่ 2 หมายถึงหลักสิบของตำแหน่งแคมเบอร์ที่มีความโค้งสูงสุดเมื่อคิดเป็นร้อยละโดยเทียบจากชายหน้าของแพนอากาศ และตัวเลข 2 หลักสุดท้ายหมายถึงอัตราความหนาสูงสุดของแพนอากาศเมื่อเทียบกับคอร์ดเมื่อคิดเป็นร้อยละ

รุ่น 5 หลัก ตัวเลขหลักที่ 1 หมายถึงสัมประสิทธิ์แรงยก (lift coefficient, C_L) ที่ออกแบบไว้ที่ถูกหารด้วย 0.15 ตัวเลขหลักที่ 2 หมายถึงตำแหน่งแคมเบอร์ที่มีความโค้งสูงสุดเมื่อคิดเป็นร้อยละโดยเทียบจากชายหน้าของแพนอากาศคูณด้วย 20 ตัวเลขหลักที่ 3 แสดงถึงประเภทของเส้นแคมเบอร์ถ้าแสดงเลข 0 หมายถึงแคมเบอร์หงายปกติ (normal camber line) ถ้าแสดง

หมายเลข 1 หมายถึงแคมเบอร์คว่ำ (reflex camber line) และตัวเลข 2 หลักสุดท้ายหมายถึงอัตราความหนาสูงสุดของแพนอากาศเมื่อเทียบกับคอร์ดเมื่อคิดเป็นร้อยละเช่นเดียวกับรุ่น 4 หลัก

รุ่น 6 หลัก ตัวเลขหลักที่ 1 แสดงถึงชื่อรุ่น ตัวเลขหลักที่ 2 ตำแหน่งที่มีความดันน้อยที่สุด หลักที่ 3 คือสัมประสิทธิ์แรงยก (lift coefficient, C_L) ที่ต้องการในการออกแบบ ตัวเลข 2 หลักต่อมาหมายถึงอัตราความหนาสูงสุดของแพนอากาศเมื่อเทียบกับคอร์ดเมื่อคิดเป็นร้อยละเช่นเดียวกับรุ่น 4 และ 5 หลัก และอีก 1 หลักเป็นเลขที่แสดงกำกับไว้ด้านล่างของหลักที่ 2 แสดงถึงค่าสิบเท่าของช่วงที่สามารถรักษาสัมประสิทธิ์แรงต้าน (drag coefficient, C_D) ให้มีค่าน้อยภายใต้สัมประสิทธิ์แรงยกที่ออกแบบ เป็นต้น

2.1.2 แรงทางอากาศพลศาสตร์

อากาศพลศาสตร์ เป็นสาขาวิชาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของอากาศโดยเฉพาะการไหลผ่านวัตถุที่เป็นของแข็ง การพิจารณาแรงทางอากาศพลศาสตร์สำหรับอากาศยานคือแรงที่เป็นผลจากการไหลของอากาศยานผ่านกระแสอากาศแต่พิจารณากลับด้านเป็นกระแสอากาศที่ไหลผ่านอากาศยาน โดยแรงทางอากาศพลศาสตร์ของอากาศยานมี 2 แรง ที่เปลี่ยนแปลงไปกับลักษณะของกระแสอากาศ ดังนี้

2.1.2.1 แรงยก (Lift)

แรงยก คือแรงที่ทำให้อากาศยานลอยตัวอยู่ได้ขณะทำการบินผ่านอากาศ โดยแรงยกสำหรับอากาศยานประเภทปีกตรึงถูกสร้างมาจากบริเวณปีกเครื่องบินเป็นหลัก ซึ่งเป็นผลมาจากการที่ปีกเครื่องบินมีลักษณะเป็นแพนอากาศเหนี่ยวนำให้ความดันบริเวณผิวปีกบนมีค่าต่ำกว่าความดันบริเวณผิวปีกล่าง อากาศบริเวณด้านล่างจึงพยายามเคลื่อนที่ขึ้นไปบริเวณด้านบนแต่เมื่อมีวัตถุหรือปีกเครื่องบินที่เป็นวัตถุที่กั้นความแตกต่างของความดันนี้จึงทำให้เกิดเป็นแรงลัพธ์ดันปีกเครื่องบินขึ้นไปด้านที่มีความดันต่ำกว่านั่นเอง ขนาดของแรงยกจะขึ้นอยู่กับรูปร่างแพนอากาศ, พื้นที่ปีก, มุมปะทะ, ความเร็ว และความหนาแน่นของอากาศ และมีทิศทางตั้งฉากกับลมสัมพัทธ์ (relative wind, V_∞)

$$L = \left(\frac{1}{2}\rho V_\infty^2\right) \times S \times C_L \tag{2.1}$$

เมื่อ L คือ แรงยก (Lift)

ρ คือ ความหนาแน่นของอากาศ (Density of Air)

V_∞ คือ ความเร็วของอากาศที่ไหลผ่านปีก (Velocity of Air) หรือความเร็วลมสัมพัทธ์

S คือ พื้นที่ปีก (Wing Area)

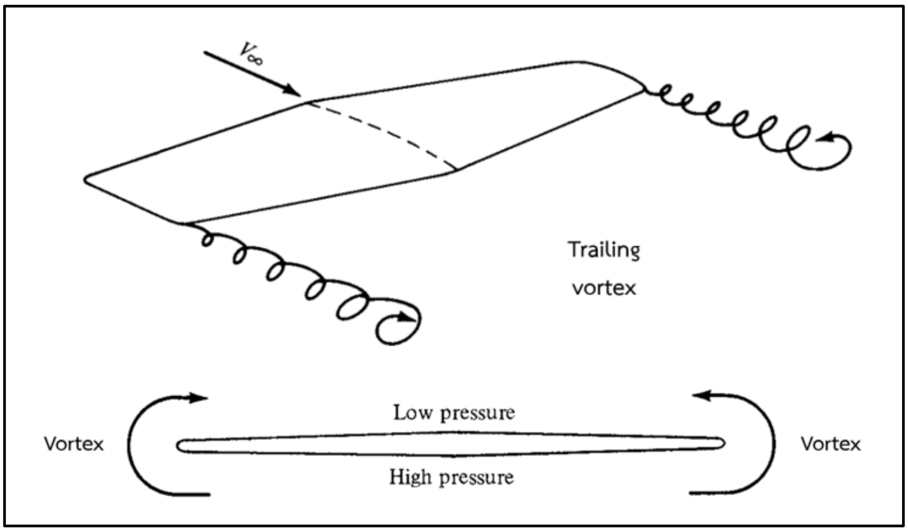
C_L คือ สัมประสิทธิ์แรงยก (Lift Coefficient)

2.1.2.2 แรงต้าน (Drag)

แรงต้าน คือแรงที่ต้านการเคลื่อนที่ของอากาศยานในทิศทางตรงข้ามกับทิศทางการบิน (flight path) ของอากาศยานและขนานกับแนวการเคลื่อนที่ของกระแสอากาศหรือลมสัมพัทธ์ (relative wind) ซึ่งแรงต้านนี้มีผลกระทบต่อประสิทธิภาพและสมรรถนะของการบิน เช่น พิสัยสูงสุดของการบินและระยะเวลานานสุดการบิน เป็นต้น แรงต้านนี้สามารถแบ่งออกได้ 3 ชนิด คือ แรงต้านเหนี่ยวนำ (Induced Drag), แรงต้านติดตัว (Parasite Drag) และแรงต้านเนื่องจากคลื่นอัดตัว (Wave Drag)

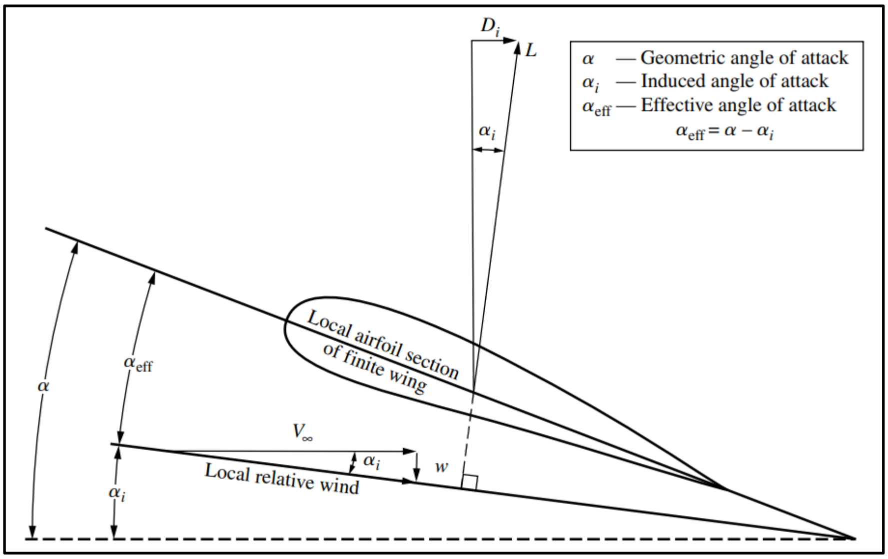
1) แรงต้านเหนี่ยวนำ (Induced Drag)

แรงต้านเหนี่ยวนำเป็นแรงต้านที่เพิ่มขึ้นหากแรงยกมีค่าเพิ่มขึ้น เนื่องจากเป็นแรงที่เกิดจากการที่อากาศไหลอ้อมจากบริเวณความดันสูงผิวปีกล่างไปสู่ความดันต่ำบริเวณผิวปีกบนบริเวณปลายปีก ซึ่งเกิดการไหลวน (circulatory flow) เป็นเกลียวบริเวณส่วนท้ายกระแสอากาศหลังผ่านปีกซึ่งเรียกว่า วอร์เท็กซ์ (vortex) บริเวณที่ปลายปีกทั้งสองด้านอากาศยานจะมีเทรลลิ่งวอร์เท็กซ์ (trailing vortex) หรือวอร์เท็กซ์ปลายปีก (wingtip vortices) ที่มีความเร็วประกอบเล็กๆ ทิศทางไหลลงด้านล่างทำให้อากาศรอบๆหมุนไปกับมันบริเวณใกล้ปีกซึ่งเรียกว่า ดาวน์วอช (downwash, w)



รูปที่ 2.2 trailing vortex ของปีกอากาศยาน (Anderson J., 2011)

เมื่อลมสัมพัทธ์บริเวณปีก (v_∞) และดาวน์วอช (w) รวมกันจะส่งผลกระทบให้ลมสัมพัทธ์เดิมเบนลงล่างจากทิศเดิม ลมที่เปลี่ยนไปนี้เรียกว่า ลมสัมพัทธ์ท้องถิ่น (local relative wind) แสดงดังรูปที่ 2.3 ซึ่งผลสัมพัทธ์ท้องถิ่นนี้ส่งผลให้แรงต้านอากาศเพิ่มขึ้น โดยแรงต้านส่วนที่เพิ่มขึ้นจากเหตุการณ์นี้เรียกว่า แรงต้านเหนี่ยวนำ (induced drag)



รูปที่ 2.3 ลมสัมพัทธ์ท้องถิ่นเนื่องจากผลกระทบของดาวน์วอช (Anderson J., 2011)

จากรูปที่ 2.3 มุมปะทะเรขาคณิต (Geometric angle of attack, α) ซึ่งเป็นมุมระหว่างทิศทางของลมสัมพัทธ์กับเส้นสมมติที่ลากจากขอบหน้าถึงขอบหลังของปีก (chord line) ถูกเหนี่ยวนำให้เกิดการเบนลงด้านล่างด้วยผลกระทบของดาวน์วอช (downwash) เป็นมุมที่เรียกว่า มุมปะทะเหนี่ยวนำ (induced angle of attack, α_i) ดังนั้นแพนอากาศเจอกับมุมปะทะบังเกิดผล (effective angle of attack, α_{eff}) แทนมุมปะทะเรขาคณิตโดยหาขนาดได้จาก $\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$ อย่างไรก็ตามแรงลัพธ์ทางอากาศพลศาสตร์ที่เกิดขึ้นยังคงตั้งฉากกับลมสัมพัทธ์อยู่ ดังนั้นแรงลัพธ์นี้จะถูกเบนไปด้านหลังเป็นมุม α_i เวกเตอร์ประกอบในทิศทางขนานกับทิศลมสัมพัทธ์นี้เรียกว่า แรงต้านเหนี่ยวนำ (induced drag, D_i) โดยสัมประสิทธิ์แรงต้านเหนี่ยวนำมีนิยามดังสมการต่อไปนี้

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi AR\, e} \tag{2.2}$$

เมื่อ C_L คือ เป็นสัมประสิทธิ์แรงยกของปีก

AR คือ อัตราส่วนกว้างยาวปีก (aspect ratio)

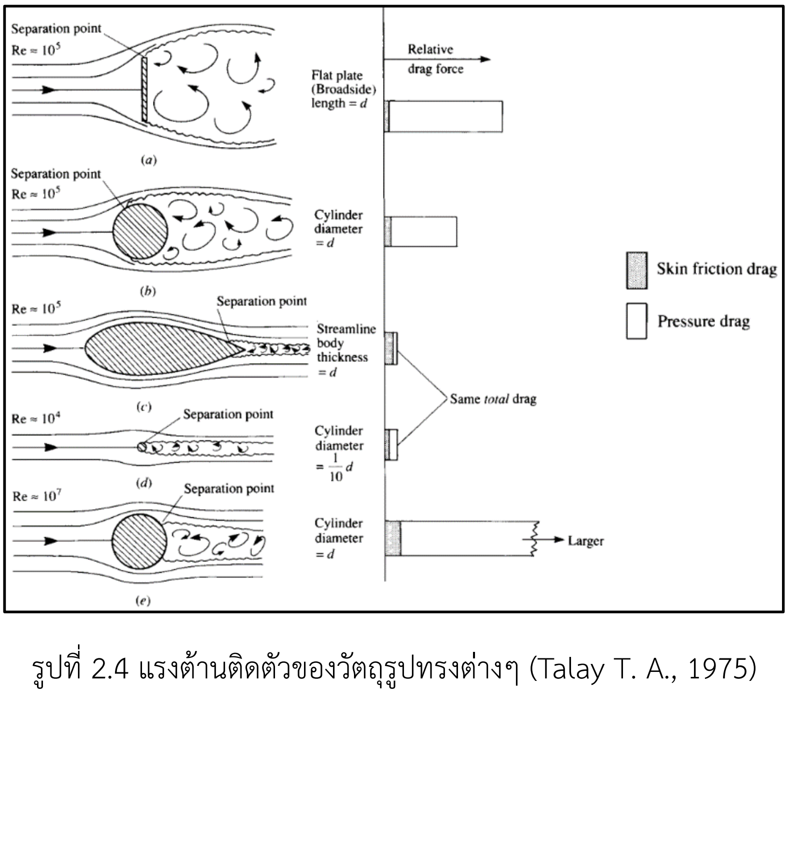
e คือ ค่าออสวอลด์ (Oswald efficiency factor) เป็นตัวประกอบเฉพาะของปีกแต่ละรูปร่าง โดยจะมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1 โดยปีกที่มีค่า e มากที่สุดคือ ปีกแบบวงรี ดังนั้นจึงส่งผลให้เกิดค่า C_{D_i} ต่ำที่สุด และโดยทั่วไปแล้วปีกสำหรับเครื่องบินความเร็วต่ำกว่าเสียงจะมีค่า e อยู่ในช่วง 0.85-0.95

2) แรงต้านติดตัว (Parasite Drag)

แรงต้านติดตัวประกอบไปด้วย 2 แรง คือแรงจากการเสียดทานของอากาศกับผิวของวัตถุที่อากาศไหลผ่าน เรียกว่า แรงต้านที่เกิดจากความเสียดทานผิว (friction drag, D_f) และแรงเนื่องจากความดันจากการไหลแยกตัวของอากาศ เรียกว่า แรงต้านที่เกิดจากความดัน (pressure drag, D_p) ดังนั้นแรงต้านรวมของ 2 แรงดังกล่าวคือแรงต้านที่มีสาเหตุมาจากผลกระทบของความหนืด นอกจากนี้แรงต้านที่เกิดจากการไหลแยกตัวของอากาศหรือแรงต้านที่เกิดจากความดันสามารถแบ่งการพิจารณาได้เป็น 2 ส่วน ได้ดังนี้

2.1) แรงต้านจากรูปร่าง (Form Drag) เป็นแรงที่เกิดจากความแตกต่างของความดันบริเวณด้านหน้าและด้านหลังของวัตถุเมื่ออากาศไหลผ่าน โดยความดันบริเวณด้านหน้าของวัตถุจะมีค่ามากกว่าบริเวณด้านหลัง ส่งผลให้แรงนี้ดันวัตถุเคลื่อนที่สวนทางกับการเคลื่อนที่

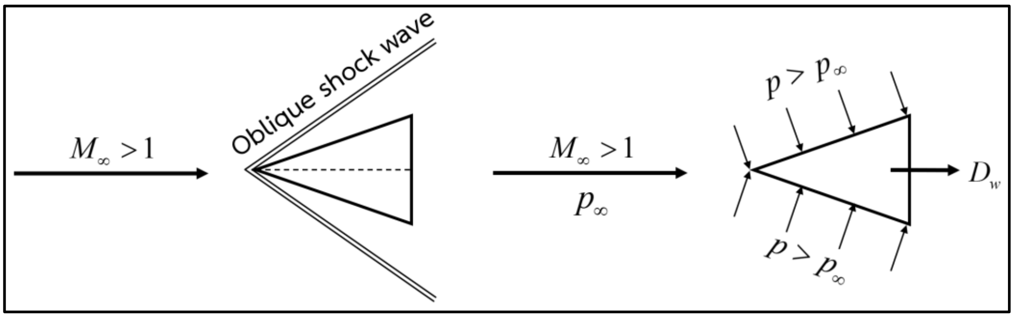
2.2) แรงต้านแทรกสอด (Interference Drag) เป็นแรงที่เกิดจากข้อต่อหรือมุมระหว่างชิ้นส่วนอากาศยานที่ยึดติดชิ้นส่วนอากาศยานเข้าด้วยกัน เช่น ข้อต่อระหว่างปีกกับลำตัว บริเวณที่ติดตั้งหางเข้ากับลำตัว เป็นต้น



รูปที่ 2.4 แรงต้านติดตัวของวัตถุรูปทรงต่างๆ (Talay T. A., 1975)

3) แรงต้านเนื่องจากคลื่นอัดตัว (Wave Drag)

แรงต้านชนิดนี้จะเกิดขึ้นเมื่อความเร็วของอากาศที่ไหลผ่านวัตถุมีความเร็วมากกว่าความเร็วเสียง ซึ่งจะมีคลื่นกระแทก (shock wave) โดยความดันของอากาศจะเปลี่ยนแปลงไปอย่างมากหลังผ่านคลื่นกระแทกเฉียง (oblique shock wave) และเนื่องจากความดันกระทำตั้งฉากกับผิววัตถุในขณะที่ผิวทำมุมเอียงกับลมสัมพัทธ์จึงทำให้เกิดแรงต้านขึ้นบนวัตถุนั้น ซึ่งเรียกเรียกต้านชนิดนี้ว่า แรงต้านเนื่องจากคลื่นอัดตัว (wave drag, D_w)



รูปที่ 2.5 การเกิดแรงต้านเนื่องจากคลื่นอัดตัว

2.1.3 **ทฤษฎีเส้นแรงยก** (Lifting-Line Theory)

ทฤษฎีเส้นแรงยก (Lifting-Line Theory) เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์หรือวิธีการวิเคราะห์การไหลรอบปีกสามมิติที่เสนอโดย Ludwig Prandtl เพื่อใช้อธิบายและวิเคราะห์แรงยกของปีกในสภาพการไหลสามมิติที่ซับซ้อนให้กลายเป็นปัญหาเชิงเส้นการกระจายของแรงยกซึ่งมีความแม่นยำมากสำหรับปีกที่มีความบางและอัตราส่วนกว้างยาว (Aspect Ratio, AR) สูง เนื่องจากเป็นแบบจำลองที่ตั้งอยู่บนสมมุติฐานที่ว่าแรงยกของปีกสามมิติสามารถแทนได้ด้วยเส้นกระแสสมมุติ (Bound Vortex) ซึ่งกระจายแรงยก (lift distribution) และคำนวณผลกระทบของการไหลวนที่ปลายปีก (Wingtip Vortices) ซึ่งส่งผลต่อแรงต้านจากการเหนี่ยวนำ (induced drag) แรงยกและแรงต้านสามารถคำนวณได้โดยอาศัยสมการเบอร์นูลลี (Bernoulli's Equation) และการกระจายการไหลวน (Circulation) ของปีก โดยพิจารณาปีกว่าเป็นชุดของแพนอากาศในแนวสองมิติ

สมมุติฐานของทฤษฎีเส้นแรงยก

1) การไหลรอบปีกเป็นแบบไม่อัดตัว (incompressible flow)
2) ปีกเป็นโครงสร้างบาง (thin airfoil)
3) การกระจายแรงยกตามแนวยาวของปีกสามารถแทนด้วยเส้นกระแสเดียว
4) ไม่มีการไหลข้ามขอบหน้าหรือขอบท้ายของปีก (slipstream-free flow)

สมการพื้นฐานของทฤษฎีเส้นแรงยก

1) แรงยกต่อหน่วยความยาวของปีก (L')

$$L' = \rho \times V \times \Gamma \tag{2.3}$$

เมื่อ L' คือ แรงยกต่อหน่วยความยาวของปีก

ρ คือ ความหนาแน่นของอากาศ

V คือ ความเร็วของอากาศที่ไหลผ่านปีก

Γ คือ กระแสไหลวน (circulation หรือ vortex strength)

2) แรงต้านจากการเหนี่ยวนำ (Induced Drag)

$$C_D' = \frac{C_L^2}{\pi ARe} \tag{2.4}$$

เมื่อ C_L คือ สัมประสิทธิ์แรงยก (lift coefficient)

AR คือ อัตราส่วนกว้างยาวของปีก (aspect ratio)

e คือ ค่าออสวอลด์ (Oswald efficiency factor)

การไหลวน (Γ) บนปีกสามารถกระจายได้ในรูปแบบฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ โดยมีความสัมพันธ์กับตำแหน่งตามความยาวปีก (y) และมุมปะทะ (α) ดังสมการ

$$\Gamma(y) = \frac{1}{2}\pi V c(y) C_L(\alpha) \tag{2.5}$$

เมื่อ $c(y)$ คือ ความยาวเชิงเส้นของแพนอากาศที่ตำแหน่ง y

$C_L(\alpha)$ คือ สัมประสิทธิ์แรงยกที่ขึ้นอยู่กับมุมปะทะ หรือ $C_{L\alpha}$

การกระจายแรงยก (L') ตามความยาวของปีกสามารถแสดงเป็นสมการ (2.6) และแรงยกทั้งหมดของปีกจะหาได้จากสมการที่ (2.7)

$$L'(y) = \Gamma(y)\rho V \tag{2.6}$$

$$L = \int_{-b/2}^{b/2} L'(y)dy \tag{2.7}$$

การไหลวนที่ปลายปีกทำให้เกิดการหมุนวนของอากาศ (Vortex) จะสร้างแรงต้านเพิ่มขึ้นซึ่งเป็นข้อเสียของปีกสามมิติที่จะไม่เกิดขึ้นในแพนอากาศสองมิติ โดยการวิเคราะห์แรงต้านจากการเหนี่ยวนำนี้อาศัยการคำนวณผลรวมของการไหลวนตลอดความยาวปีก

$$D_i = \int_{-b/2}^{b/2} \rho V \Gamma \alpha_i dy \tag{2.8}$$

เมื่อ α_i คือ มุมปะทะของการเหนี่ยวนำ

อย่างไรก็แบบจำลองนี้ก็ยังมีข้อจำกัดอยู่ นั้นคือ จะใช้ได้ดีในกรณีที่ปีกมีอัตราส่วนกว้างยาวของปีก (AR) ที่มีค่าสูง ดังนั้นจึงไม่เหมาะสำหรับปีกที่มีรูปทรงซับซ้อนหรือปีกที่มี AR ต่ำ และ เนื่องด้วยสมมุติฐานของแบบจำลองนี้เกี่ยวกับการไหลแบบไม่อัดตัวทำให้ไม่สามารถนำไปใช้ในกรณีที่ความเร็วของอากาศที่ค่าสูงหรือเป็นความเร็วที่เข้าใกล้ความเร็วเสียงได้

2.1.4 การเปรียบเทียบการคำนวณแพนอากาศกับปีกเครื่องบิน

ปีกเครื่องบิน หรือปีกของอากาศยาน (wing) เป็นโครงสร้างสามมิติที่เกิดจากการต่อเนื่องของแผ่นโครงสร้างสองมิติที่เรียกว่าแพนอากาศ (airfoil) ดังนั้นการคำนวณสมรรถนะหรือประสิทธิภาพทางอากาศพลศาสตร์ของปีกในระดับพื้นฐานจึงสามารถเริ่มต้นได้จากการวิเคราะห์แพนอากาศ ซึ่งเป็นการศึกษาในมุมมองสองมิติที่ลดความซับซ้อนลงเพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ แต่ในความเป็นจริงปีกเป็นโครงสร้างแบบสามมิติซึ่งจะมีปัจจัยเพิ่มขึ้น เช่น การไหลวนที่ปลายปีก (wingtip vortex) ที่ส่งผลต่อประสิทธิภาพการสร้างแรงยกและแรงต้านอากาศของปีกโดยรวม

2.1.4.1 การวิเคราะห์แพนอากาศ

แพนอากาศเป็นหน้าตัดของปีกเครื่องบินที่มีรูปทรงเฉพาะในการสร้างแรงยกและลดแรงต้านอากาศ การวิเคราะห์แพนอากาศโดยทั่วไปสามารถใช้สมการพื้นฐานของการไหลราบเรียบรอบวัตถุ (potential flow theory) ได้ ซึ่งจะได้สมการแรงยกของแพนอากาศ (lift per unit span: L') ได้จากสมการที่ (2.9) และแรงต้านอากาศของแพนอากาศ (drag per unit span: D') ได้จากสมการที่ (2.10)

$$L' = \rho \times V \times \Gamma \tag{2.9}$$

$$D' = \frac{1}{2} \rho V^2 c C_D \tag{2.10}$$

เมื่อ L' คือ แรงยกต่อหน่วยความยาวของปีก (N/m)

ρ คือ ความหนาแน่นของอากาศ (kg/m^3)

V คือ ความเร็วของอากาศที่ไหลผ่านปีก (m/s)

c คือ ความยาวเชิงเส้นของแพนอากาศ (m)

C_L คือ สัมประสิทธิ์แรงยก

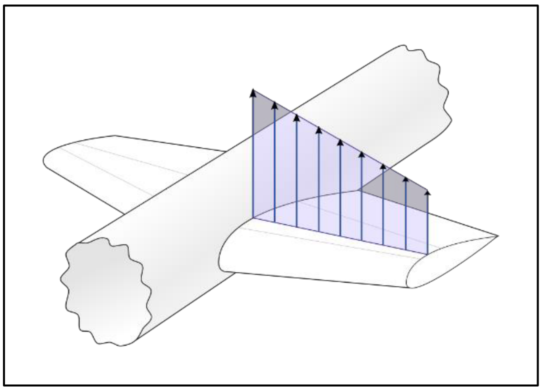
C_D คือ สัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ

2.1.4.2 การวิเคราะห์ปีกเครื่องบินในสามมิติ

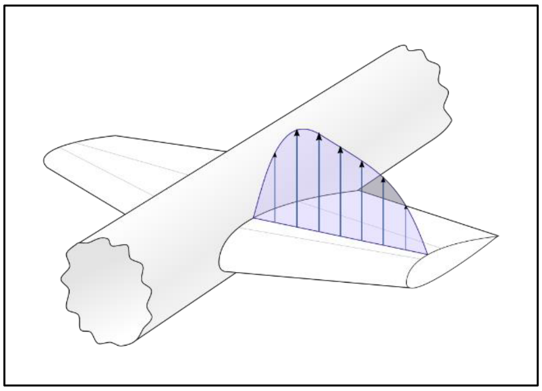
เมื่อแพนอากาศถูกวางเรียงตัวต่อเนื่องกันเป็นแนวของปีกสามมิติจะทำให้ต้องคำนึงเกิดมีอยู่ของปลายปีกหรือจุดสิ้นสุดของปีก ซึ่งทำให้เกิดการไหลวนที่ปลายปีกจนเหนี่ยวนำเป็นแรงต้านอากาศชนิดหนึ่งที่เรียกว่า แรงต้านอากาศเหนี่ยวนำ (induced drag) ส่งผลให้แรงต้านอากาศสำหรับปีกเครื่องบินจะมีค่าเพิ่มขึ้น และพฤติกรรมเส้นแรงยกของปีกเครื่องบินจะเปลี่ยนไปจากการวิเคราะห์ของแพนอากาศแสดงในรูปที่ 2.6 สำหรับการวิเคราะห์ปีกสามมิติสามารถหาแรงยกได้จากสมการที่ 2.1 โดยสามารถหาสัมประสิทธิ์แรงยกของปีกสามมิติได้จากสมการ (2.11)

$$C_L = \frac{2\pi AR}{2+\sqrt{4+\left(ARe\right)^2}} \tag{2.11}$$

และสามารถหาสัมประสิทธิ์แรงต้านเหนี่ยวนำได้จากสมการที่ (2.2) ซึ่งแสดงให้เห็นว่าเมื่อปีกมีค่าสัมประสิทธิ์แรงยกเพิ่มขึ้น จะทำให้สัมประสิทธิ์แรงต้านเหนี่ยวนำเพิ่มขึ้นไปด้วย



ก. เส้นการกระจายแรงยก
ที่ไม่สนใจผลกระทบของปลายปีก



ข. เส้นการกระจายแรงยก
ที่โดนผลกระทบของปลายปีก

รูปที่ 2.6 ลักษณะของเส้นกระจายแรงยก (Olivier Cleynen, 2011)

2.1.5 **วิธีแถบตาข่ายลมวน** (Vortex lattice method)

วิธีแถบตาข่ายลมวน คือทฤษฎีการไหลในอุดมคติที่ลดความซับซ้อนของการไหลจริงที่เกิดขึ้นตามธรรมชาติเพื่อลดระยะเวลาในการคำนวณ ให้เหมาะสำหรับการออกแบบเบื้องต้นที่

ต้องการผลเฉลยไปใช้ในการเปรียบเทียบความแตกต่างของการปรับเปลี่ยนตัวแปรการออกแบบต่างๆ วิธีการคำนวณนี้เป็นการวิเคราะห์การไหลโดยไม่พิจารณาถึงผลกระทบของความหนืด ความปั่นป่วน การกระจายตัว และผลกระทบของชั้นชิดผิวในการสร้างแบบจำลองการคำนวณเพื่อประมาณค่าของแรงทางอากาศพลศาสตร์ โดยเงื่อนไขสมมติฐานของการคำนวณมีดังนี้

1) เป็นการไหลแบบไม่มีความหนืด (inviscid flows)

2) เป็นการไหลแบบไม่สามารถอัดตัวได้ (incompressible flows)

3) เป็นการไหลแบบไม่หมุนวน (irrotational flows)

4) ไม่พิจารณาถึงอิทธิพลของความหนาที่มีผลต่ออากาศพลศาสตร์ มุมปะทะและมุมลื่นไถล

อย่างไรก็ตามการหาประสิทธิภาพของอากาศยานผ่านวิธีแถบตาข่ายลมวนยังคงมีขีดจำกัดที่ต้องระวังเนื่องจากการตั้งสมมติฐานดังกล่าว คือ ไม่สามารถหาสัมประสิทธิ์แรงต้านได้อย่างแม่นยำเนื่องจากการไหลเป็นการละเลยผลของความหนืด และไม่สามารถวิเคราะห์แรงต้านที่เกิดจากการแยกตัวของอากาศเมื่อไหลผ่านวัตถุได้ ซึ่งความแม่นยำนี้จะลดลงเมื่อมุมปะทะสูงขึ้น และจะไม่สามารถคำนวณได้อีกต่อไปเมื่อถึงสภาวะสูญเสียแรงยก (stall condition) เนื่องจากเป็นการคำนวณที่วิเคราะห์ประสิทธิภาพบริเวณผิวของอากาศยานเท่านั้น แต่เมื่อมุมปะทะสูงขึ้นการไหลของอากาศในโลกความจริงจะไม่สามารถเกาะติดที่บริเวณผิวอากาศยานได้อีกต่อไป หรือเกิดสิ่งที่เรียกว่า การแยกไหล (flow separation) อย่างไรก็ตามการหาประสิทธิภาพของการบินสามารถใช้วิธีแถบตาข่ายลมวนนี้ในได้ศึกษาพฤติกรรมของการเปลี่ยนแปลงรูปแรงของอากาศยานได้เนื่องจากเป็นการคำนวณประสิทธิภาพทางอากาศพลศาสตร์จากรูปร่างของอากาศยานโดยตรง

จากการตั้งข้อสมมติฐานดังกล่าวทำให้การไหลที่เกิดขึ้นเป็นการไหลแบบสนามอนุรักษ์ที่มีค่าศักย์ของความเร็วก่อกวน (perturbation velocity potential: φ) ร่วมอยู่ด้วย โดยเวกเตอร์ความเร็วรวมสะสม (total velocity vector : V) นี้สามารถหาได้จากสมการ

$$V = V_{\infty} + \nabla\varphi \tag{2.12}$$

การหาค่าศักย์ของความเร็วก่อกวนสำหรับปัญหาของอากาศยานจะแบ่งพื้นผิวที่ใช้สำหรับการสร้างแรงยก (lifting surface) ทั้งหมดของเครื่องบินเป็นแผงสี่เหลี่ยมจำนวนหนึ่งโดยที่แต่ละแผงจะมีจุดควบคุมการคำนวณอยู่ (collocation point/control point) และแต่จะแผงจะมีกระแสลมวนเกือกม้า (horseshoe vortex) ของตัวเอง โดยการคำนวณนี้จำเป็นต้องพิจารณาค่าความแรงของกระแสลมวน (vortex strength: Γ) ของแต่ละแผง นอกจากนี้ค่าของเวกเตอร์ตั้งฉาก (normal vector : n) จะคำนวณที่จุดควบคุมของแต่ละแผงการคำนวณซึ่งจะตั้งฉากกับพื้นผิวแคม

เบอร์ที่ใช้ในการสร้างแรงยก สำหรับปัญหานี้ความเร็วการก่อกวนที่จุดควบคุม i จะรวมอยู่กับผลของกระแสลมวนรูปเกือกม้าทั้งหมดในรูปของค่าสัมประสิทธิ์ที่มีอิทธิพลต่ออากาศพลศาสตร์ (Aerodynamic Influence Coefficient: w_{ij}) โดยสามารถหาค่าศักย์ของความเร็วก่อกวนของแต่ละจุดได้จากสมการต่อไปนี้

$$\nabla \varphi_i = \sum_{j=1}^{N} w_{ij} \Gamma_j \tag{2.13}$$

เมื่อพิจารณาถึงเวกเตอร์ความเร็วการไหลอิสระ (freestream speed : $\mathbf{V}_\infty$) สามารถหาได้จากความเร็วการไหลอิสระ (freestream speed : V_∞) ที่มีทิศทางขึ้นอยู่กับมุมปะทะ (angle of attack : α) และมุมลื่นไถล (sideslip: β) ตามสมการ (2.14) และใช้เงื่อนไขขอบเขตของนอยมันน์ (Neumann boundary condition)

$$\mathbf{V}_\infty = V_\infty \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta \\ -\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

ในการพิจารณาจุดควบคุมแต่ละจุดจะพบว่าความเร็วตั้งฉากบนพื้นผิวแคมเบอร์จะมีค่าเป็นศูนย์

$$v_i \cdot n_i = \left(V_\infty + \sum_{j=1}^{N} w_{ij} \Gamma_j \right) \cdot n_i = 0 \tag{2.15}$$

เงื่อนไขดังกล่าวนี้สามารถเรียกอีกอย่างได้ว่าเงื่อนไขการไหลแบบแทนเจนต์ (flow tangency condition) เมื่อจัดรูปค่าสัมประสิทธิ์ที่มีอิทธิพลต่ออากาศพลศาสตร์แบบใหม่ตามทิศทางตั้งฉากจะได้ $a_{ij} = w_{ij} \cdot n_i$ และเมื่อจัดรูปของความเร็วกระแสอิสระและมุมทางอากาศพลศาสตร์ให้อยู่ในรูปของ b_i จะได้ลักษณะของค่าเป็น $b_i = V_\infty \left[-\cos\alpha\cos\beta, \sin\beta, -\sin\alpha\cos\beta \right] \cdot n_i$ ทำให้สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

และสุดท้ายจึงสามารถหาค่าแรงลัพธ์ทั้งหมด (F) ได้จากสมการ (2.17) และโมเมนต์ทั้งหมด (M) จากสมการ (2.18) โดยเกิดจากผลรวมของแรงแต่ละจุด (F_i) ซึ่งแรงลัพธ์แต่ละจุดนั้นหาได้จากสมการ (2.19)

$$F = \sum_{i=1}^{N} F_i \tag{2.17}$$

$$M = \sum_{i=1}^{N} F_i \times r_i \tag{2.18}$$

$$F_i = \rho \Gamma_i \left(\mathbf{V}_\infty + v_i \right) \times l_1 \tag{2.19}$$

เมื่อ N คือ จำนวนแผงทั้งหมด

r_i คือ ค่าระยะเทียบจากศูนย์กลางของของแผง

ρ คือ ความหนาแน่นของอากาศ

v_i คือ ความเร็วก่อกวน (perturbation velocity)

l_i คือ เวกเตอร์ของกระแสลมวมจากแผงตามขวาง

2.1.6 พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ (Computational Fluid Dynamics: CFD)

พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณเป็นแขนงหนึ่งของวิชากลศาสตร์ของไหลที่ใช้วิธีการเชิงตัวเลขและอัลกอริทึมเพื่อวิเคราะห์และแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการไหลของของไหลและการถ่ายเทความร้อน ซึ่งเป็นวิธีที่นิยมใช้ในการจำลองสถานการณ์ทางด้านวิศวกรรมศาสตร์เนื่องจากสามารถให้ข้อมูลเชิงลึกโดยละเอียดเกี่ยวกับพฤติกรรมการไหลของของไหลที่ซับซ้อนได้ ANSYS Fluent เป็นซอฟต์แวร์ที่ใช้กันอย่างแพร่หลายเนื่องจากมีชุดเครื่องมือที่ครอบคลุมสำหรับการจำลองการไหลและการถ่ายเทความร้อน และมีรูปแบบของสมการของการจำลองความปั่นป่วนของการไหลหลายรูปแบบ นอกจากนี้ยังสามารถแสดงผลพฤติกรรมการไหลให้เห็นภาพและเข้าใจมากขึ้น เช่น การแสดงค่าแถบสี, เวกเตอร์ทิศทางการไหล เป็นต้น โดยสมการและวิธีการแก้ปัญหาพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณของซอฟต์แวร์ ANSYS Fluent มีดังต่อไปนี้

2.1.6.1 สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes Equations: NSE)

สมการนาเวียร์-สโตกส์เป็นสมการพื้นฐานที่ควบคุมการไหลของของไหลโดยพิจารณาจากการอนุรักษ์มวลและการอนุรักษ์โมเมนตัม และหากการไหลนั้นมีพลังงานเข้ามาเกี่ยวเนื่องอาจมีการใช้สมการอนุรักษ์พลังงานเพื่อรักษาความต่อเนื่องของของไหลในทิศทางต่างๆ ร่วมด้วย โดยสมการที่ใช้ในการแก้ปัญหาการไหลในรูปอนุพันธ์เชิงย่อยแสดงดังสมการที่ (2.20), (2.21), (2.22), (2.23) และ (2.24)

สมการอนุรักษ์มวล

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0 \tag{2.20}$$

สมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน X

$$\frac{\partial(\rho uu)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vu)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho wu)}{\partial z}=-\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{2.21}$$

สมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน Y

$$\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vv)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho wv)}{\partial z}=-\frac{\partial \rho}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{2.22}$$

สมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน Z

$$\frac{\partial(\rho uw)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vw)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho ww)}{\partial z}=-\frac{\partial \rho}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{2.23}$$

สมการอนุรักษ์พลังงาน

$$\frac{\partial(\rho u c_p T)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v c_p T)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w c_p T)}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{2.24}$$

เมื่อ ρ คือ ความหนาแน่นของของไหล

u , v และ w คือ ความเร็วในแนวแกน x , y และ z ตามลำดับ

μ คือ ความหนืดพลวัตร หรือ ความหนืดไดนามิก (dynamic viscosity)

c_p คือ ค่าความร้อนจำเพาะของของไหล (specific heat)

T คือ อุณหภูมิของของไหล

k คือ ค่าการนำความร้อน (thermal conductivity)

เงื่อนไขสมมติฐานพื้นฐานของสมการนาเวียร์-สโตกส์ในงานออกแบบปีกอากาศยานของการคำนวณมีดังนี้

1) เป็นของไหลต่อเนื่อง (Continuum Hypothesis)

2) เป็นของไหลนิวตัน (Newtonian Fluid Assumption) ที่แรงเฉือนเป็นสัดส่วนโดยตรงกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว

2.1.6.2 กระบวนการแบ่งเอลิเมนท์ (Discretization)

กระบวนการแบ่งเอลิเมนท์หรือกระบวนการดิสครีไทเซชั่นเป็นขั้นตอนสำคัญในการแก้สมการอนุพันธ์เชิงย่อยของพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณที่เกี่ยวข้องกับการแปลงสมการควบคุมการไหลอย่างต่อเนื่อง เช่น สมการนาเวียร์-สโตกส์ให้เป็นสมการพีชคณิต (algebraic equations) แบบไม่ต่อเนื่องที่สามารถแก้ไขหรือคำนวณได้โดยใช้วิธีเชิงตัวเลข โดยจะแบ่งแยกพื้นที่ทั้งหมดของของไหลที่ต้องการจำลองเรียกว่า “โดเมน (domain)” ของปัญหาเป็นองค์ประกอบขนาดเล็ก เช่น ตาราง, เมช (mesh), หรือเป็นปริมาตรควบคุมที่เป็นจำนวนจำกัดด้วยวิธีต่างๆ คือ วิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Method: FDM), วิธีไฟไนต์เอลิเมนท์ (Finite Element Method: FEM) และวิธีปริมาตรสืบเนื่อง (Finite Volume Method: FVM) ตามลำดับเพื่อแยกสมการภายในองค์ประกอบเหล่านี้สำหรับวิเคราะห์ลักษณะของของไหลที่มีการเคลื่อนที่

1) วิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Method: FDM)

วิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Method: FDM) เป็นเทคนิคหนึ่งของการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีคำนวณเชิงตัวเลขสำหรับการแก้สมการอนุพันธ์โดยการประมาณอนุพันธ์ที่มีผลต่างเป็นจำนวนจำกัดด้วยสมการ (2.25) ซึ่งเป็นวิธีที่ง่ายที่สุดในการประมาณค่าเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 (Makauskas P., 2022)

$$v'\left(x_i\right)=\frac{v\left(x_i+h_x\right)-v\left(x_i\right)}{h_x} \tag{2.25}$$

โดยที่ $v\left(x\right)$ คือ ฟังก์ชันต่อเนื่องที่สามารถหาอนุพันธ์ได้

x_i คือ จุดที่อยู่ในฟังก์ชันของ $v\left(x\right)$

h_x คือ ระยะห่างในทิศทาง x ของจุด $v\left(x_i\right)$ กับ $v\left(x_i+h_x\right)$

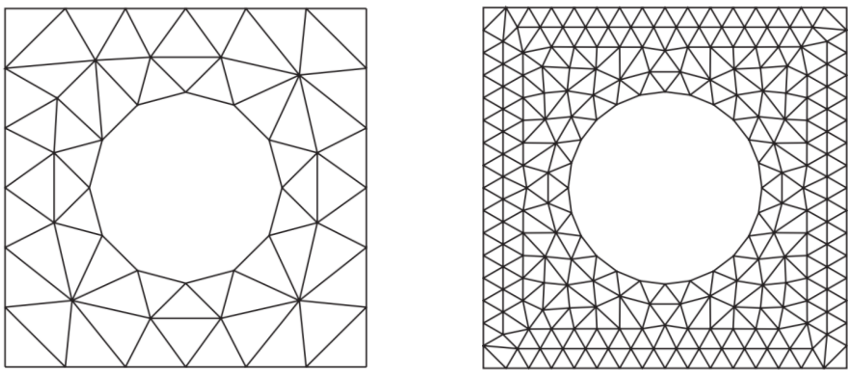
วิธีการประมาณผลต่างจุดศูนย์กลาง (central difference method) เป็นอีกวิธีหนึ่งที่มีแม่นยำกว่าสมการข้างต้น เนื่องจากเป็นการประมาณโดยใช้ค่าทั้งสองฝั่งของผลต่างสืบเนื่องรอบจุดนั้นๆ

$$v'\left(x_i\right)=\frac{v\left(x_i+h_x\right)-v\left(x_i-h_x\right)}{2h_x} \tag{2.26}$$

สำหรับอนุพันธ์อันดับสองจะใช้การประมาณผลต่างจุดศูนย์กลางโดยมีแนวคิดหลักมาจากการนำผลต่างสืบเนื่องรอบจุดนั้นทางด้านหน้าและด้านหลังมาใช้

2) วิธีไฟไนต์เอลิเมนท์ (Finite Element Method: FEM)

วิธีไฟไนต์เอลิเมนท์ (Finite Element Method: FEM) เป็นวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้แก้ปัญหาทางวิศวกรรมที่มีรูปแบบปัญหา คือ การหาฟังก์ชันการกระจายตัวของตัวแปรในระบบสามมิติ ซึ่งปัญหาแต่ละอย่างจะสามารถอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ โดยโดเมนของโครงสร้างสำหรับวิธีไฟไนต์เอลิเมนท์จะถูกจำลองและแบ่งเป็นองค์ประกอบย่อยที่มีรูปร่างขนาดเล็กอย่างง่าย องค์ประกอบย่อยนี้จะถูกเรียกว่า “เอลิเมนท์ (element)” ซึ่งโดเมนของแบบจำลองนี้จะมีระดับความเสรีจำกัด (finite number of degree of freedom) และในแต่ละเอลิเมนท์จะมีค่าของตัวแปรที่ต่างกันตามตำแหน่งใด ๆ โดยปกติแล้วแบบจำลองที่มีการแบ่งองค์ประกอบย่อยที่ละเอียดมากกว่าจะช่วยเพิ่มความถูกต้องให้กับตัวแปรที่ต้องการได้ เนื่องจากเมื่อจำนวนเอลิเมนท์มากขึ้นทำให้ขนาดของเอลิเมนท์ลดลงและทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนผิดพลาดจากการคำนวณมีค่าลดลงในแต่ละเอลิเมนท์ได้แต่จะใช้เวลาในทรัพยากรการคำนวณที่มากขึ้น (Fish J., 2007)



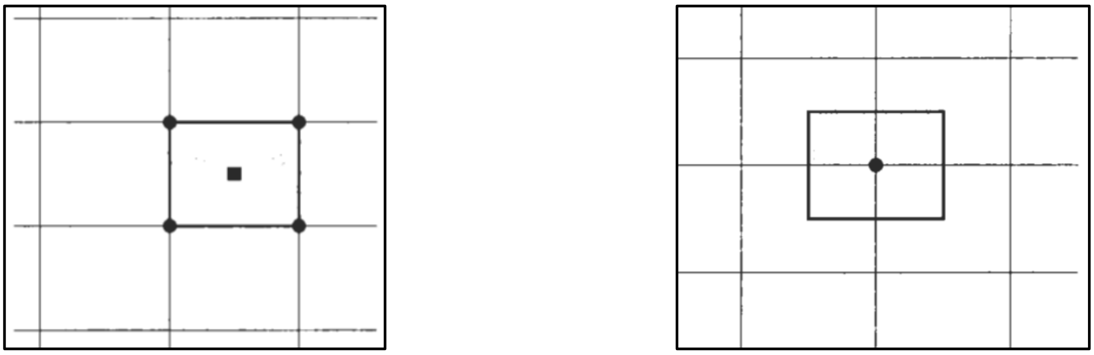
ก. แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนท์แบบหยาบ ข. แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนท์แบบละเอียด

รูปที่ 2.7 แบบจำลองการแบ่งองค์ประกอบย่อยไฟไนต์เอลิเมนท์ (Fish J., 2007)

3) วิธีปริมาตรสืบเนื่อง (Finite Volume Method: FVM)

วิธีปริมาตรสืบเนื่อง (Finite Volume Method: FVM) เป็นวิธีการคำนวณหาค่าปริพันธ์หรืออินทิกรัลของสมการนาเวียร์-สโตกส์ใช้กฎของการอนุรักษ์โดยตรง โดยการแยกสมการที่ใช้ในการควบคุมการไหลโดยแบ่งพื้นที่โดเมนออกเป็นทรงหลายเหลี่ยมที่มีปริมาตรจำกัดเรียกว่า “ปริมาตรควบคุม (control volume)” ค่าปริพันธ์นี้จะถูกประมาณด้วยผลรวมของฟลักซ์ (fluxes) ที่ตัดผ่านแต่ละปริมาตรควบคุม ความแม่นยำของการแบ่งพื้นที่ด้วยปริมาตรควบคุมนี้ขึ้นอยู่กับรูปแบบเฉพาะที่ใช้ในการหาค่าฟลักซ์ การแบ่งพื้นที่ปริมาตรควบคุมสามารถทำได้หลายรูปแบบซึ่งรูปแบบพื้นฐานของการแบ่งพื้นที่นี้มีอยู่ 2 ลักษณะ คือ แบบกลางเซลล์ (cell-centred scheme) และแบบจุดขอบเซลล์ (cell-vertex scheme) แสดงดังรูปที่ 2.8 ข้อดีของวิธีปริมาตรสืบเนื่อง คือ

การแบ่งพื้นที่ปริมาตรควบคุมที่สามารถคำนวณได้โดยไม่มีปัญหากับการเปลี่ยนแปลงระบบพิกัดของพื้นที่การคำนวณเมื่อเทียบกับวิธีผลต่างสืบเนื่อง นอกจากนี้ยังมีความยืดหยุ่นสูงของการจัดการรูปทรงที่ซับซ้อนและตรวจจับความไม่ต่อเนื่องได้อย่างมีประสิทธิภาพซึ่งเหมาะกับปัญหาที่ต้องการจำลองการไหลของของไหล (Blazek J., 2015)



ก. ปริมาตรควบคุมที่แบ่งแบบกลางเซลล์ ข. ปริมาตรควบคุมที่แบ่งแบบจุดขอบเซลล์

รูปที่ 2.8 วิธีการแบ่งพื้นที่ปริมาตรควบคุม (Blazek J., 2015)

2.1.6.3 วิธีการแก้ปัญหา (Solution Methods)

การแก้ปัญหาของการคำนวณการไหลของของไหลจะใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบวนซ้ำเพื่อแก้สมการที่ถูกแยกออกเป็นส่วนย่อยของแต่ละพื้นที่สามารถทำได้ด้วยซอฟต์แวร์ ANSYS Fluent ที่มีอัลกอริทึมหลากหลายในการแก้ปัญหา เช่น ตัวแก้ปัญหาจากค่าแรงดัน (pressure-based solver), ตัวแก้ปัญหาจากค่าความหนาแน่น (density-based solver) และตัวแก้ปัญหาจากการแยกตัว (segregated solver) เป็นต้น โดยการเลือกวิธีการแก้ปัญหานี้จะขึ้นอยู่กับประเภทของปัญหาการไหล

2.1.6.4 การสร้างแบบจำลองความปั่นป่วน (Turbulence Modeling)

แบบจำลองความปั่นป่วนเป็นสูตรทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการจำลองและทำนายการไหลโดยเฉพาะการไหลประเภทปั่นป่วนภายในขอบเขตกำหนด ในบริบทของพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณการสร้างแบบจำลองแบบปั่นป่วนมีบทบาทสำคัญในการทำนายปรากฏการณ์การไหลแบบปั่นป่วนได้อย่างแม่นยำ แบบจำลองเหล่านี้ช่วยยุติสมการควบคุมการไหลของของไหลโดยการประมาณผลกระทบของความปั่นป่วนต่อตัวแปรการไหลต่างๆ แบบจำลองความปั่นป่วนนั้นมีหลากหลายรูปแบบโดยแต่ละแบบจำลองมีสมมติฐานและการนำไปใช้งานที่ต่างกันออกไป แบบจำลองความปั่นป่วนที่นิยมใช้ใน ANSYS Fluent ได้แก่

1) แบบจำลองความปั่นป่วน k-epsilon ($k-\varepsilon$)

แบบจำลองความปั่นป่วน k-epsilon เป็นแบบจำลองปั่นป่วนสองสมการที่ใช้กันอย่างแพร่หลายเนื่องจากมีประสิทธิและความซับซ้อนในการคำนวณที่ไม่มากจนเกินไป โดยทำการแก้สมการถ่ายโอนสองสมการ คือ สมการถ่ายโอนพลังงานจลน์ปั่นป่วน (k) แสดงในสมการ (2.27) และสมการถ่ายโอนของอัตราการสลายตัวของพลังงานจลน์ปั่นป่วน (ε) แสดงในสมการ (2.28) ซึ่งสมมติฐานของแบบจำลองความปั่นป่วนนี้ คือ การไหลเป็นแบบไอโซทรอปิก (isotropic) เหมือนกันทุกทิศทางประเภทปั่นป่วนเต็มรูปแบบ (fully turbulent) ทำให้สามารถละผลกระทบเนื่องจากความหนืดของโมเลกุลสารได้ แต่แบบจำลองนี้จะไม่แม่นยำสำหรับของไหลบริเวณใกล้ผนัง (Wilcox D. C., 1998)

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho v k)=\nabla\cdot\left(\frac{\mu_t}{\sigma_k}\nabla k\right)+P_k-\rho\varepsilon \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho v\varepsilon)=\nabla\cdot\left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\nabla\varepsilon\right)+C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}P_k-C_{2\varepsilon}\rho\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{2.28}$$

เมื่อ k คือ ค่าการถ่ายโอนพลังงานจลน์ปั่นป่วน (turbulent kinetic energy)

ε คือ อัตราการสลายตัวของพลังงานจลน์ปั่นป่วน (turbulent dissipation rate)

ρ คือ ความหนาแน่นของของไหล (density)

v คือ เวกเตอร์ความเร็วของของไหล (velocity vector)

μ_t คือ ความหนืดเนื่องจากการไหลปั่นป่วน (turbulent viscosity)

P_k คือ Production of turbulent kinetic energy

$C_{1\varepsilon}$ และ $C_{2\varepsilon}$ คือ ค่าคงที่ (constants)

σ_k และ σ_ε คือ ค่าคงที่ของแบบจำลอง (model constants)

2) แบบจำลองความปั่นป่วน k-omega shear stress transport

แบบจำลองความปั่นป่วน k-omega ($k-\omega$) เป็นแบบจำลองความปั่นป่วนแบบสมการสองสมการที่ใช้ในการจำลองพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณเพื่อทำนายการไหลแบบปั่นป่วนที่มีแม่นยำในสภาวะการไหลที่หลากหลาย รวมถึงการไล่ระดับแรงดันที่ความดันสถิตเพิ่มขึ้นในทิศทางการไหลของของไหลและมีความแม่นยำสำหรับของไหลบริเวณใกล้ผนัง แบบจำลองความปั่นป่วน k-omega shear stress transport ($k-\omega\ SST$) เป็นแบบจำลองที่ผสมกันระหว่างองค์ประกอบของแบบจำลอง k-epsilon และ k-omega เข้าด้วยกัน โดยสมการการถ่ายโอนสำหรับ

พลังงานจลน์ปั่นป่วนแสดงดังสมการ (2.29) และอัตราการสลายตัวของพลังงานจลน์ปั่นป่วนจำเพาะ (2.30) (Menter F. R., 1994)

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho v k)=\nabla\cdot\left(\frac{\mu_t}{\sigma_k}\nabla k\right)+P_k-\beta^*\rho\omega k \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho v\omega)=\nabla\cdot\left(\frac{\mu_t}{\sigma_\omega}\nabla\omega\right)+\frac{\alpha_3}{\omega}P_k-\beta\rho\omega^2+\frac{\beta^*\rho}{\sigma_{\omega 2}}\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial x} \tag{2.30}$$

เมื่อ ω คือ อัตราการสลายตัวของพลังงานจลน์ปั่นป่วนจำเพาะ (specific dissipation rate)

β^* คือ Production to dissipation ratio

3) แบบจำลองความปั่นป่วน Spalart-Allmaras

แบบจำลองความปั่นป่วน Spalart-Allmaras เป็นแบบจำลองความปั่นป่วนแบบสมการเดียวที่พัฒนามาเพื่อจัดการกับการไหลบริเวณใกล้ผนังและบริเวณชั้นชิดขอบ โดยการแก้ปัญหาความหนืดของกระแสไหล (eddy viscosity) ด้วยสมการถ่ายโอน (2.31) (Spalart P. R. และ Allmaras S. R., 1992)

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho\tilde{v})}{\partial t}+v\cdot\nabla(\rho\tilde{v})&=\nabla\cdot\left[(v+\sigma\tilde{v})\nabla\tilde{v}\right]+\frac{C_{b1}\tilde{v}^2}{\tilde{\omega}}\\&-\frac{\rho C_{\omega 1}f_\omega(\tilde{\omega})\tilde{v}^2}{k^2(\tilde{\omega}^2+k^2)}+2(1-f_{\omega 2})\rho\varepsilon\end{aligned} \tag{2.31}$$

เมื่อ $\tilde{v}$ คือ ความหนืดเนื่องจากการไหลปั่นป่วน (turbulent viscosity)

$\tilde{\omega}$ คือ ความถี่เนื่องจากการไหลปั่นป่วน (turbulent frequency)

2.1.6.5 เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions: BCs)

เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions: BCs) เป็นองค์ประกอบสำคัญของพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ เนื่องจากเป็นการกำหนดพฤติกรรมของของไหลบริเวณขอบของโดเมนการคำนวณ ซึ่งมีบทบาทสำคัญในการตรวจสอบความถูกต้องและความสมจริงของการจำลองการไหล โดยเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้ในการกำหนดลักษณะของไหลบริเวณที่ขอบต่างๆนั้นมีอยู่ 3 ประเภท คือ กำหนดเงื่อนไขขอบเขตด้วยความเร็ว (velocity boundary conditions) กำหนดเงื่อนไขขอบเขตด้วยความดัน (pressure boundary conditions) และ กำหนดเงื่อนไขขอบเขตด้วยค่าเชิงปริมาณ (scalar boundary conditions) เช่น อุณหภูมิ ความเข้มข้น ค่าคงที่ เป็นต้น

2.1.6.6 ขั้นตอนหลังการประมวลผล (Post-Processing)

ขั้นตอนหลังการประมวลผล เป็นขั้นตอนของการวิเคราะห์และการแสดงภาพผลลัพธ์การจำลองที่ได้จากการแก้สมการควบคุมการไหลของของไหล โดยการใช้ข้อมูลเชิงลึกจากข้อมูลจำนวนมากที่สร้างขึ้นระหว่างกระบวนการจำลองการไหลรวมถึงตัวแปรต่างๆ มาแสดงผลด้วยเทคนิคการแสดงภาพ (visualization) เพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจและตีความพฤติกรรมของของไหลที่ซับซ้อนภายใต้โดเมนการคำนวณที่กำหนด เช่น ความเร็ว ความดัน อุณหภูมิ ค่าความปั่นป่วน เป็นต้น โดยวิธีการแสดงภาพทั่วไปของพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ คือ contour plots, vector plots, iso-surfaces, streamlines และ animation ซึ่งนอกเหนือจากการแสดงภาพแล้วยังรวมถึงการวิเคราะห์เชิงปริมาณของผลการจำลองเพื่อตรวจสอบค่าประสิทธิภาพเฉพาะและตัวแปราทางวิศวกรรมต่างๆ เช่น อัตราการถ่ายเทความร้อน แรงต้านการไหล ค่าสัมประสิทธิ์แรงยก เป็นต้น เพื่อนำข้อมูลจากการจำลองไปเปรียบเทียบกับข้อมูลจากผลการทดลองเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ โดยความแตกต่างของข้อมูลอาจบ่งบอกถึงพื้นที่สำหรับการแก้ไขปรับปรุงการจำลองให้มีความแม่นยำมากขึ้น

2.1.7 การออกแบบการทดลองด้วยวิธีสุ่มลูกบาศก์หลายมิติแบบลาติน (Latin Hypercube Sampling: LHS)

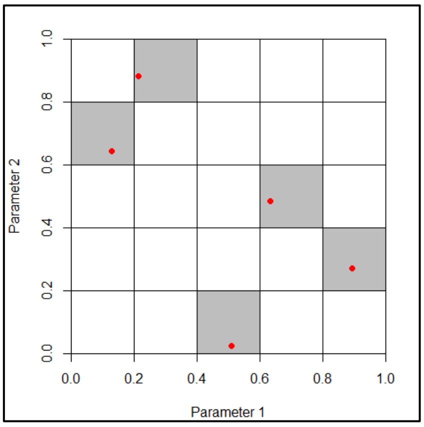
การออกแบบการทดลองทางคอมพิวเตอร์ด้วยวิธีสุ่มลูกบาศก์หลายมิติแบบลาติน (Latin Hypercube Sampling: LHS) เป็นหนึ่งในวิธีทางสถิติสำหรับการออกแบบการทดลอง (Design of Experiment, DOE) ที่ใช้ในการสร้างข้อมูลกลุ่มตัวอย่างเริ่มต้น หรือกล่าวได้ว่าเป็นจุดเทรนนิ่งสำหรับการสร้างสมการแบบจำลองทดแทนเพื่อวิเคราะห์ถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรการออกแบบและผลลัพธ์ วิธีนี้เป็นวิธีที่ได้รับความนิยมและมีประสิทธิภาพที่สามารถยอมรับได้ โดยจะแบ่งขอบเขตของตัวแปรการออกแบบเป็นช่วงย่อยจำนวน M ช่วงที่มีขนาดเท่ากัน ดังนั้นช่วงย่อยที่ j_{th} ของตัวแปรออกแบบที่ i_{th} สามารถหาได้จากสมการ (2.32) หลังจากนั้นทำการสร้างจุดในช่วงย่อยทั้งหมดด้วยหลักการสุ่มของวิธีมอนติคาร์โลดังสมการ (2.33) โดยที่จุดตัวอย่างเริ่มต้นหรือจุดเทรนนิ่ง (X) แต่ละตัวจะอยู่ในช่วงของขอบเขตล่าง (L) ถึงขอบเขตบน (U) ของแต่ละช่วงย่อย (สุจินต์ บุรีรัตน์และคณะ, 2556)

$$L_{ij} = L_i + \left(j-1\right)\left(U_i - L_i\right)/M \quad \leq \quad X_{ij} \quad \leq \quad L_{ij} + j\left(U_i - L_i\right)/M = U_{ij} \tag{2.32}$$

$$X_{ij} = L_{ij} + \left(U_{ij} - L_{ij}\right) \cdot rand \tag{2.33}$$

เมื่อ $rand \in [0,\ 1]$ คือ ตัวเลขสุ่มที่กระจายตัวแบบเอกรูป (uniform random number) ตั้งแต่ 0 ถึง 1

ตัวอย่างการทำงานของวิธีสุ่มลูกบาศก์หลายมิติแบบลาตินถูกแสดงอย่างง่ายในรูปที่ 2.9 ซึ่งเป็นสองมิติสำหรับปัญหาที่มีจำนวนตัวแปรการออกแบบ 2 ตัว ซึ่งเห็นได้ว่าต้องมีการกำหนดจำนวนของจุดตัวอย่างเริ่มต้นก่อนเพื่อนำไปแบ่งเป็นช่วงย่อย โดยจุดตัวอย่างเริ่มต้นแต่ละตัวจะไม่ซ้ำกันในแต่ละช่วงย่อย หรือกล่าวได้ว่าในแต่ละแนวของช่วงย่อยจะมีจุดตัวอย่างเริ่มต้นเพียงจุดเดียว เท่านั้น ซึ่งคุณสมบัตินี้เป็นคุณสมบัติที่แสดงให้เห็นว่าวิธีสุ่มลูกบาศก์หลายมิติแบบลาตินมีการกระจายตัวของจุดตัวอย่างเริ่มต้นที่มากกว่าวิธีมอนติคาร์โล



รูปที่ 2.9 ตัวอย่างการทำงานอย่างง่ายของวิธีสุ่มลูกบาศก์หลายมิติแบบลาติน (Carnell R., 2022)

2.1.8 การหาค่าเหมาะสมสุดของภาพใหญ่ (Efficient Global Optimization)

การหาค่าเหมาะสมสุด (Optimization) คือการหาตัวเลือกหรือผลลัพธ์ที่ดีที่สุดภายใต้เงื่อนไขทางคณิตศาสตร์ที่ถูกกำหนดไว้ (Žilinskas A., 2006) โดยเลือกตัวแปรจากกลุ่มข้อมูลที่กำหนดให้ฟังก์ชันเป้าหมายที่เป็นวัตถุประสงค์ของการหาค่าเหมาะสมสุด เช่น การหาค่าต่ำที่สุด (minimization) หรือการหาค่าสูงที่สุด (maximization) ซึ่งการหาค่าเหมาะสมสุดเป็นเครื่องมือช่วยในการออกแบบต่างๆ เพื่อให้เกิดประโยชน์สูงสุดต่อสิ่งที่ต้องการ การหาค่าเหมาะสมสุดสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\min_{x} \; f(x) \tag{2.34}$$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับที่กำหนดไว้ดังนี้

$$g_i(x) \le 0,\ i = 1,\ldots,m$$
$$h_i(x) = 0,\ i = 1,\ldots,l \qquad (2.35)$$
$$L_i \le x_i \le U_i,\ i = 1,\ldots,n$$

เมื่อ x คือ เวกเตอร์ตัวแปรออกแบบขนาด $n \times 1$ (design variables vector)

f คือ ฟังก์ชันเป้าหมายหรือฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (objective function)

g_i คือ ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับในรูปแบบอสมการ (inequality constraints)

h_i คือ ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับในรูปแบบสมการ (equality constraints)

L_i คือ ขอบเขตล่างของตัวแปรออกแบบ (lower bound constraints)

และ U_i คือ ขอบเขตบนของตัวแปรออกแบบ (upper bound constraints) (สุจินต์ บุรีรัตน์, 2556) ปัญหาการออกแบบเหมาะสมสุดมีส่วนประกอบย่อยที่สำคัญ 4 ส่วน ดังนี้

1) ตัวแปรออกแบบ (design variables) คือ กลุ่มของตัวแปรอิสระ (independent variables) ที่มีคุณสมบัติเฉพาะที่เป็นอิสระต่อกันสามารถเขียนแทนด้วยเวกเตอร์ $x = \{x_1,\ldots,x_n\}^T$ ซึ่งเป็นตัวแปรที่ส่งผลกระทบต่อตัวแปรตาม (dependent variables) หรือฟังก์ชันเป้าหมาย

2) ฟังก์ชันเป้าหมาย (merit function) คือ ค่าของตัวแปรตามที่บ่งบอกถึงคุณภาพของตัวแปรออกแบบ สามารถเขียนแทนด้วย $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$

3) เงื่อนไขบังคับ (constraints) คือ สมการหรืออสมการที่กำหนดตัวแบ่งเขตระหว่างบริเวณค่าความเป็นไปได้ของคำตอบหรือบริเวณที่หาคำตอบได้ (feasible region) และบริเวณหาคำตอบไม่ได้ (infeasible region) เพื่อใช้ในการควบคุมค่าของตัวแปรออกแบบหรือพฤติกรรมฟังก์ชันเป้าหมาย

4) กรณีต้องการออกแบบเพื่อหาค่ามากที่สุดสามารถจัดการกับปัญหาดังกล่าวเพื่อให้สอดคล้องกับรูปแบบมาตรฐานตามสมการ (2.34) โดยการเขียนแทนด้วย $\max\ f(x)$ และประยุกต์ใช้ฟังก์ชันเป้าหมายสมมูลได้ดังนี้

$$\max f(x) = \min\ -f(x) \qquad (2.36)$$

หรือ

$$\max f(x) = \min\ 1/f(x) \qquad (2.37)$$

การหาค่าเหมาะสมสุดของภาพใหญ่ (Efficient Global Optimization) เป็นวิธีการเพิ่มประสิทธิภาพที่ออกแบบมาเพื่อค้นหาฟังก์ชันที่เหมาะสมที่สุดสำหรับพื้นที่การออกแบบทั้งหมดซึ่งจำเป็นต้องใช้ทรัพยากรจำนวนมากในการตรวจสอบบริเวณดังกล่าว ดังนั้นจึงเกิดแนวคิดของ

แบบจำลองทดแทนที่ใช้ในการประมาณฟังก์ชันวัตถุประสงค์และเป็นแนวทางในการเลือกจุดตัวอย่างใหม่เพื่อเพิ่มความแม่นยำและความถูกต้องของการประมาณการ

2.1.8.1 แบบจำลองทดแทน (surrogate models)

แบบจำลองทดแทน คือการสร้างสมการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการประมาณค่าฟังก์ชันเป้าหมายจากความสัมพันธ์ของตัวแปรการออกแบบที่ทำหน้าที่เป็นข้อมูลนำเข้า (input) และค่าฟังก์ชันเป้าหมายที่ทำหน้าที่เสมือนเป็นผลลัพธ์ (output) หรือผลเฉลยของตัวแปรการออกแบบต่างๆ โดยเริ่มจากการสุ่มผลเฉลยของปัญหาการหาค่าเหมาะสมสุดก่อนทำการหาค่าฟังก์ชันจริงของผลเฉลย ซึ่งเมื่อทราบตำแหน่งจุดของผลเฉลยแล้วสามารถใช้วิธีทางคณิตศาสตร์ต่างๆ ในการสร้างแบบจำลองทดแทนได้ เช่น

1) การประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันฐานหลักแนวรัศมี

การประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันฐานหลักแนวรัศมี (radial basis function, RBF) หรือการประมาณค่าด้วยพื้นผิวสไปลน์ (surface spline interpolation) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\overline{y}(x) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i K\left(\|x - x_i\|\right) \tag{2.38}$$

เมื่อ $y = f(x)$ คือ ฟังก์ชันหรือตัวแปรตามของเวกเตอร์ออกแบบที่จุดใด x

x_i คือ จุดศูนย์กลาง

M คือ จำนวนค่าที่ได้จากการออกแบบการทดลอง

α_i คือ สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันที่ต้องการหาค่า

$K(x)$ คือ ฟังก์ชันฐานหลักซึ่งมีหลายรูปแบบแล้วแต่การเลือกใช้งาน

จากสมการ (2.38) จำนวน M ชุด สามารถแสดงได้ M สมการ ดังนี้

$$y(x_i) = f_{RBF} = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j K\left(\|x_i - x_j\|\right) \quad ; \; i = 1, \ldots, M \tag{2.39}$$

เมื่อทำการหาสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันแล้ว สามารถทำนายค่าฟังก์ชันจากแบบจำลองทดแทนที่จุดใดๆ ได้ด้วยสมการ (2.39) ตัวอย่างสมการหลังแปลงฟังก์ชันฐานหลักแสดงดังสมการที่ (2.40) (Kishi Y., 2019)

$$f_{RBF} = \sum_{j=1}^{M} w_j \cdot \exp\left(-\beta \left|x_i - x_j\right|^2\right) \tag{2.40}$$

โดยที่มี w_i เป็นสัมประสิทธิ์ถ่วงน้ำหนัก (weight coefficient) ของข้อมูลออกแบบตัวที่ i และ β คือสัมประสิทธิ์เชิงบวก

2) แบบจำลองครีจจิง (Kriging model)

แบบจำลองครีจจิงเป็นแบบจำลองทดแทนที่ประมาณค่าฟังก์ชันได้จากการรวมกันของการประมาณค่าเฉพาะที่ (local) และการประมาณค่าแบบวงกว้าง (global) ดังสมการต่อไปนี้

$$\bar{y} = p(x) + Z(x) \tag{2.41}$$

เมื่อ $p(x)$ คือ ฟังก์ชันพหุนามสำหรับการประมาณค่าวงกว้าง

$Z(x)$ คือ ฟังก์ชันการประมาณค่าเฉพาะที่

โดยที่ฟังก์ชันการประมาณค่าเฉพาะที่นี้เป็นฟังก์ชันกระบวนการเกาส์เซียนสโตแคสติก (stochastic Gaussian process) ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ขณะที่ความแปรปรวนร่วมเกี่ยว (covariance) ไม่เป็นศูนย์ หากฟังก์ชันพหุนามสำหรับการประมาณค่าวงกว้าง $p(x)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นสามารถแสดงได้ดังนี้

$$p(x) \quad = \quad \beta_0 + \sum \beta_i x_i \quad = \quad \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{p}(\mathbf{x}) \tag{2.42}$$

เมื่อ $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_0, \ldots, \beta_n\}^T$ และ $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{1, x_1, x_2, \ldots, x_n\}^T$ ค่าความแปรปรวนร่วมเกี่ยวของฟังก์ชันการประมาณค่าเฉพาะที่ $Z(x)$ สามารถหาได้จาก

$$Cov\left(Z\left(x^p\right), Z\left(x^q\right)\right) = \sigma^2 \mathbf{R}\left[R\left(x^p, x^q\right)\right] \tag{2.43}$$

เมื่อ σ คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

R คือ ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ (correlation) จากผลเฉลยในเมตริกซ์ออกแบบ

$\mathbf{R}$ คือ เมตริกซ์สหสัมพันธ์สมมาตรขนาด $N \times N$ ที่สมาชิกแนวทแยงเป็นหนึ่ง

ฟังก์ชันสหสัมพันธ์จากผลเฉลยในเมตริกซ์ออกแบบสามารถหาได้จากสมการ

$$R\left(x^p, x^q\right) = \exp\left(-\left(x^p - x^q\right)^T \boldsymbol{\theta}\left(x^p - x^q\right)\right) \tag{2.44}$$

เมื่อสามารถหาพารามิเตอร์สหสัมพันธ์ที่ไม่ทราบค่า $\boldsymbol{\theta}$ ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (maximum likelihood method) และค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันพหุนาม $\boldsymbol{\beta}$ จากวิธีกำลังสองน้อยสุด ดังนั้นเมื่อทราบค่าของ $\boldsymbol{\theta}$ และ $\boldsymbol{\beta}$ แล้ว การทำนายของแบบจำลองทดแทนแบบครีจจิงสามารถหาได้จากสมการ

$$\bar{y} = p(x)^T \boldsymbol{\beta} + \mathbf{r}^T(x)\mathbf{R}^{-1}(y - \mathbf{P}\boldsymbol{\beta}) \tag{2.45}$$

เมื่อ $\mathbf{P}=\left[p(x_1),\ p(x_2),\ \ldots, p(x_M)\right]^T$ และ $\mathbf{r}^T(x)=\left[R(x,\ x_1),\ \ldots,\ R(x,\ x_M)\right]$ (สุจินต์ บุรีรัตน์, 2556)

3) แบบลูกผสมด้วยฟังก์ชันฐานหลักแนวรัศมี/ครีจจิง

(Radial Basis Function/Kriging Hybrid model: RBF/Kriging)

แบบจำลองลูกผสมเป็นเทคนิคการประมาณค่าที่ซับซ้อนเนื่องจากเป็นการผสมแนวทางการสร้างแบบจำลองตัวแทนตั้งแต่ 2 วิธีขึ้นไปเพื่อใช้ประโยชน์จากข้อดีของแต่ละวิธีกาคำนวณ ยกตัวอย่างเช่น แบบจำลองตัวแทนลูกผสมด้วยฟังก์ชันฐานหลักแนวรัศมี/ครีจจิง (Radial Basis Function/Kriging Hybrid model: RBF/Kriging) ซึ่งเป็นการประมาณค่าฟังก์ชั้นโดยการรวมแนวคิดจากวิธีฐานหลักแนวรัศมี (Radial Basis Function) และวิธีแบบครีจจิง (Kriging) เข้าด้วยกัน โดยการคำนวณแบบจำลองลูกผสมดังกล่าวสามารถรักษาความแม่นยำของฟังก์ชันพหุนามสำหรับค่าเฉลี่ยจากการประมาณค่าวงกว้าง (μ) ได้ด้วยกลุ่มข้อมูลความแม่นยำสูงและมีการปรับแนวโน้มของฟังก์ชันให้มีแนวโน้มเป็นไปตามกลุ่มของข้อมูลความแม่นยำต่ำที่มีจำนวนมากกว่าโดยสามารถทำนายแนวโน้มของฟังก์ชันได้แม่นยำกว่าจากการนำค่าเฉลี่ยจากการประมาณค่าวงกว้างไปรวมกับค่าฟังก์ชันการประมาณด้วยวิธีฐานหลักแนวรัศมีซึ่งสามารถแสดงสมการแบบจำลองตัวแทนลูกผสมด้วยฟังก์ชันฐานหลักแนวรัศมี/ครีจจิง ((Kishi Y., 2019)) ได้ดังดังสมการ (2.46) และแผนผังของข้อมูลแบบจำลองทดแทนลูกผสมของข้อมูลหลายระดับความแม่นยำแสดงดังรูปที่ 2.10

$$\hat{y}_{RBF,Kriging}=\left[\mu+f_{RBF}(x)\right]+\left[r^T(x)\mathbf{R}^{-1}\left(f-1\mu-1f_{RBF}(x)\right)\right] \tag{2.46}$$

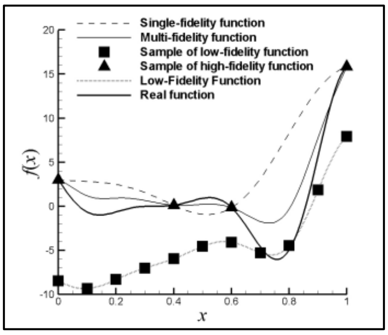
เมื่อ μ คือ ค่าเฉลี่ยจากการประมาณค่าวงกว้าง

f_{RBF} คือ ฟังก์ชันฐานหลักแนวรัศมีของข้อมูลความแม่นยำระดับต่ำ

f คือ ค่าของฟังก์ชันความแม่นยำระดับสูง

$\mathbf{R}$ คือ เมตริกซ์สหสัมพันธ์สมมาตรขนาด $N\times N$ ที่สมาชิกแนวทแยงเป็นหนึ่ง

และ $\mathbf{r}^T(x)=\left[R(x,\ x_1),\ \ldots,\ R(x,\ x_M)\right]$



รูปที่ 2.10 แผนผังของข้อมูลแบบจำลองทดแทนลูกผสม (Ariyarit et al., 2017)

2.1.8.2 ขั้นตอนวิธีเชิงพันธุกรรม (Genetic Algorithm: GA)

ขั้นตอนวิธีเชิงพันธุกรรมเป็นหนึ่งในวิธีการหาค่าเหมาะสมสุดที่มีกระบวนการคำนวณเชิงตัวเลขที่เลียนแบบมาจากหลักการการวิวัฒนาการของสิ่งมีชีวิตและหลักการคัดเลือกทางธรรมชาติตามทฤษฎีของชาร์ล ดาร์วิน โดยเริ่มจากการมีประชากรตั้งต้นก่อนการเกิดประชากรตัวตัวใหม่โดยการครอสโอเวอร์ (crossover) และมิวเทชัน (mutation) จากการคัดเลือกประชากรรุ่นก่อน (selection) หลังจากนั้นทำการเลือกประชากรรุ่นถัดไปเพื่อสร้างประชากรชุดใหม่กว่าซ้ำไปจนครบเงื่อนไขที่ต้องการ

1) การคัดเลือก (selection)

การคัดเลือก คือการเลือกสมาชิกที่มีความเหมาะสมของประชากรรุ่นปัจจุบันหรือเรียกว่าโครโมโซมพ่อ-แม่ ก่อนที่จะนำไปถ่ายทอดคุณสมบัติบางประการให้กับรุ่นถัดไป โดยมี 2 วิธี

1.1) การคัดเลือกโดยใช้วงล้อรูเลทท์ (Roulette wheel selection)

การคัดเลือกโดยใช้วงล้อรูเลทท์ คือการแบ่งพื้นที่สัดส่วนค่าความเหมาะสมโดยหากมีความเหมาะสมมากจะมีโอกาสในการได้รับเลือกมากกว่าค่าที่มีความเหมาะสมน้อย เสมือนการได้รับพื้นที่ในวงล้อรูเลทท์เมื่อมีความเหมาะสมมากจะได้รับพื้นที่ในวงล้อเยอะตามไปด้วยและเมื่อมีการหมุนวงล้อนี้จึงมีโอกาสที่จะหมุนได้ค่าที่มีความเหมาะสมเยอะมากกว่า

1.2) การคัดเลือกโดยใช้วิธีแข่งขัน (Tournament selection)

การคัดเลือกโดยวิธีแข่งขันจะเริ่มจากการสุ่มประชากรในแต่ละกลุ่มเพื่อมาเปรียบเทียบค่าผลเฉลยกับกลุ่มอื่นหลายๆครั้ง ซึ่งค่าที่มีค่าความเหมาะสมดีที่สุดจะถือเป็นผู้ที่ถูกเลือกเพื่อนำไปสร้างประชากรรุ่นถัดไป

2) การครอสโอเวอร์ (crossover)

การครอสโอเวอร์เป็นการสลับสายพันธ์ของประชากรรุ่นก่อนหน้าโดยการสุ่มตำแหน่งจุดตัดเป็นเพื่อแยกโครโมโซมออกเป็นส่วนๆ ตามต้องการ หลังจากนั้นนำสลับเปลี่ยนโครโมโซมเกิดเป็นประชากรรุ่นถัดไป เรียกว่าผลเฉลยลูก (offspring) โดยการสลับเปลี่ยนโครโมโซมนี้สามารถเกิดได้จากการมีจุดตัดของโครโมโซม 1 จุด 2 จุด หรือหลายจุดก็ได้ ตัวอย่างการครอสโอเวอร์แบบ 1 จุดเมื่อแสดงโครโมโซมเป็นเลขฐาน 2 เป็นดังนี้

ผลเฉลยพ่อ-แม่ 1: 1011|11110	ผลเฉลยลูก 1: 1011|01010
ผลเฉลยพ่อ-แม่ 2: 1000|01010	ผลเฉลยลูก 2: 1000|11110

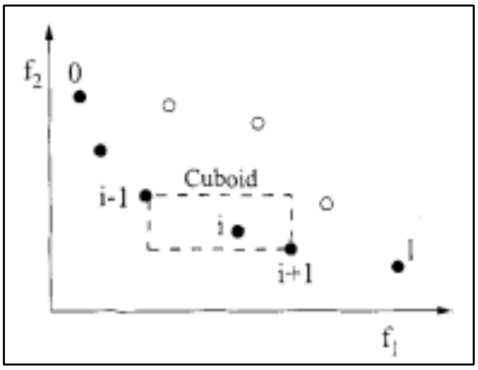
3) การมิวเทชัน (mutation)

การมิวเทชันหรือการกลายพันธุ์ คือโอกาสเกิดการที่ผลผลิตหรือประชากรลูกที่ได้มียีน (gene) บางส่วนแตกต่างไปจากยีนของพ่อ-แม่ โดยทั่วไปแล้วการกลายพันธุ์นี้จะขึ้นอยู่กับความน่าจะเป็นของการกลายพันธุ์ เรียกว่าอัตราการกลายพันธุ์ ซึ่งจะมีค่าน้อยกว่าอัตราการครอสโอเวอร์ ตัวอย่างการเกิดมิวเทชันในผลเฉลยแบบเลขฐาน 2 เป็นดังนี้

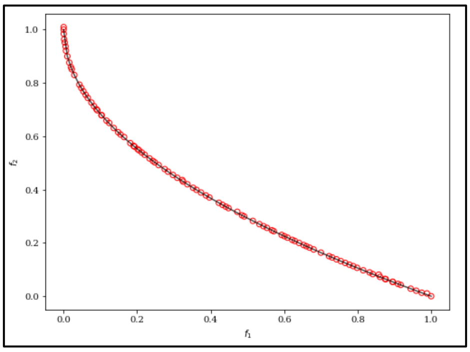
ผลเฉลยพ่อ-แม่ 1: 1011**1**1110 ผลเฉลยลูก 1: 1011**0**1110 (ตัวเข้มคือยีนที่ถูกเลือก)

ขั้นตอนหลังจากการดำเนินการคัดเลือก การครอสโอเวอร์และการมิวเทชันแล้ว คือการแทนที่ประชากร (population replacement) เป็นการเก็บผลของประชากรรุ่นลูกหรือผลเฉลยชุดใหม่ซึ่งส่งผลต่อพื้นที่ในการสุ่มรอบถัดไป โดยการแทนที่ประชากรนี้สามารถทำได้ 2 วิธี คือ การแทนที่โดยมีการตัดประชากรรุ่นพ่อ-แม่ออก เรียกว่าการแทนที่ประชากรตามขนาดที่กำหนด และการแทนที่โดยที่ยังคงเก็บประชากรรุ่นพ่อ-แม่ไว้ เรียกว่าการแทนที่ประชากรแบบขยายตัว

ภายหลังได้มีการพัฒนากระบวนการหาค่าเหมาะสมสุดหลายวัตถุประสงค์ของขั้นตอนวิธีเชิงพันธุกรรม เรียกว่าขั้นตอนวิธีเชิงพันธุกรรมแบบจัดลำดับไม่ครอบงำรุ่นที่ 2 (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm) ซึ่งเหมาะสำหรับปัญหาการหาค่าเหมาะสมสุดที่ต้องการฟังก์ชันหลายวัตถุประสงค์ (multi objective function) ซึ่งมีการเพิ่มขั้นตอนการบางอย่างในการประเมินพิจารณาค่าความเหมาะสม โดยจะแบ่งฟังก์ชันออกเป็นตามจำนวนของวัตถุประสงค์ซึ่งปกติแล้วจะเป็นฟังก์ชันที่มีความขัดแย้งกัน (trade off) โดยผลลัพธ์หรือผลเฉลยที่ได้จะมีจำนวนประชากรมากกว่าประชากรตั้งต้น ทำให้ต้องตัดประชากรบางส่วนออกโดยใช้หลักการการจัดลำดับแบบไม่ครอบงำ (non-dominated sorting) จากการคำนวณค่าระยะห่างจากฝูงชนดังรูปที่ 2.11 (Deb et al., 2002) ที่แสดงบนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างสองฟังก์ชัน เรียกว่า แผนภูมิพาเรโต (Pareto Front) ดังรูปที่ 2.12



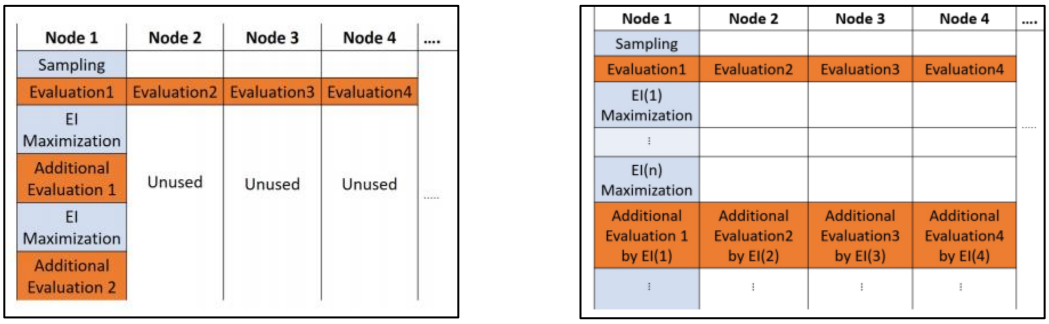
รูปที่ 2.11 ระยะห่างจากฝูงชนของผลเฉลย (Deb et al., 2002)



รูปที่ 2.12 แผนภูมิพาเรโต (Pymoo, 2022)

2.1.8.3 การสุ่มตัวอย่างเพิ่มเติม (additional sampling)

การสุ่มตัวอย่างเพิ่มเติม คือการเพิ่มจำนวนของข้อมูลตัวอย่างในการคำนวณรอบถัดไปเพื่อปรับปรุงความแม่นยำของแบบจำลอง วิธีนี้ช่วยลดภาระในการคำนวณต่อรอบและทำให้สามารถวิเคราะห์ผลกระทบของแต่ละพารามิเตอร์ได้อย่างชัดเจน ส่งผลให้กระบวนการสำรวจ (Exploration) และการหาค่าที่เหมาะสม (Exploitation) มีประสิทธิภาพขึ้น อย่างไรก็ตามอาจต้องใช้จำนวนรอบที่มากขึ้นเมื่อเทียบกับการเพิ่มหลายตัวแปรพร้อมกัน ซึ่งทำให้ระยะเวลาโดยรวมของการค้นหาค่าที่ดีที่สุดเพิ่มขึ้น แต่เหมาะสำหรับปัญหาที่ต้องการการควบคุมพารามิเตอร์อย่างละเอียด แผนผังการสุ่มตัวอย่างข้อมูลเพิ่มเติมนั้นแสดงในรูปที่ 2.11 (Ariyarit et al., 2020)



(ก) การสุ่มตัวอย่างข้อมูลเพิ่มเติมแบบค่าเดียว (ข) การสุ่มตัวอย่างข้อมูลเพิ่มเติมแบบหลายค่า

รูปที่ 2.13 แผนผังการสุ่มตัวอย่างข้อมูลเพิ่มเติมแบบค่าเดียวและหลายค่า (Ariyarit et al., 2020)

ปัญหาการออกแบบที่มีหลายวัตถุประสงค์นั้นสามารถทำนายตำแหน่งของการเพิ่มข้อมูลตัวอย่างได้โดยใช้วิธีการปรับปรุงค่าไฮเปอร์วอลุ่มความคาดหวัง (Expected Hypervolume Improvement: EHVI) ซึ่งเป็นค่าที่ประกอบไปด้วยฟังก์ชันของการปรับปรุงไฮเปอร์วอลุ่มร่วมกับความไม่แน่นอนของกระบวนการสุ่มตัวอย่างเพิ่มเติมแสดงดังสมการ (2.47) (Ariyarit et al., 2017) โดยวิธีการนี้แสดงให้เห็นถึงการเพิ่มจำนวนตัวอย่างข้อมูลสำหรับแบบจำลองตัวแทนที่นำมาประมาณค่าฟังก์ชันเป้าหมาย

$$EHVI\left[f_1(x), f_2(x), ..., f_M(x)\right] = \int_{-\infty}^{f_{ref1}} \int_{-\infty}^{f_{ref2}} ... \int_{-\infty}^{f_{refM}} HVI$$
$$\left[f_1(x), f_2(x), ..., f_M(x)\right] \mathrm{x} \phi_1(F_1)\phi_2(F_2)...\phi_M(F_M) dF_1 dF_2 dF_3 ... dF_M \quad (2.47)$$

เมื่อ F_i คือ ตัวแปรการสุ่มของเกาส์เซียน

$N\left[\hat{f}_i(x), \hat{s}_i^2(x)\right].\phi_i(F_i)$ คือ ฟังก์ชันความน่าจะเป็น

และ f_{ref_i} คือ ค่าอ้างอิงสำหรับการคำนวณหาค่าไฮเปอร์วอลุ่ม

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Liang et al., 2011 ได้นำเสนอแนวทางการออกแบบปีกเครื่องบินหลายวัตถุประสงค์ผ่านการหาค่าเหมาะสมสุดโดยใช้พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณเข้ามาช่วยในการเก็บข้อมูล และใช้สมการตัวแทนแบบครีจจิงในการลดทรัพยากรการคำนวณ โดยการออกแบบครั้งนี้ได้ตั้งวัตถุประสงค์คือ การหาลักษณะของปีกที่มีค่าความชันของกราฟแรงยกสูงที่สุดขณะบินด้วยความเร็ว 0.3 มัค และมีค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศที่น้อยที่สุดขณะบินด้วยความเร็วในช่วง 0.8 ถึง 0.9 มัค โดยการปรับเปลี่ยนค่ามุมลู่หลัง อัตราส่วนกว้างยาวของปีก อัตราส่วนเรียวของปีก มุมบิดของแต่ละส่วน และอัตราความหนาของปีกในแต่ละส่วน จากการศึกษาวิธีการออกแบบครั้งนี้พบว่าการใช้สมการจำลองทดแทนแบบครีจจิงมีส่วนช่วยลดระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณลงได้อย่างมีนัยสำคัญ

Kontogiannis et al., 2013 ได้นำเสนอการเลือกใช้ค่าเหมาะสมสุดจากการออกแบบอากาศยานไร้คนขับขนาดเล็กตั้งแต่กระบวนการออกแบบแนวความคิด โดยเริ่มจากการกำหนดวัตถุประสงค์และภารกิจของอากาศยานไร้คนขับ จากนั้นทำการประมาณน้ำหนักขององค์ประกอบอากาศยานแต่ละส่วนเพื่อนำไปสู่ขั้นตอนการออกแบบเบื้องต้น โดยให้ความสำคัญกับปีกเครื่องบินมากที่สุดเนื่องจากมีการประยุกต์การหาค่าเหมาะสมสุดกับการเลือกรูปร่างของปีกขณะที่ค่าอัตราภาพของปีกและความยาวปีกไม่เปลี่ยนแปลง นั้นคือการเลือกใช้ค่าอัตราส่วนเรียว มุมกวาดหลัง มุมบิด และการใส่อุปกรณ์เสริมปลายปีก จากนั้นจึงทำการเลือกลักษณะรูปร่างของลำตัวและหางต่อไป งานวิจัยนี้ทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพการบินด้วยค่าสัมประสิทธิ์แรงยก สัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ ระบบใบพัด สมรรถนะการบิน ความสมดุล และโครงสร้างของเครื่องบิน จากการวิเคราะห์ผลด้วยพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณพบว่าการเลือกใช้ค่าที่เหมาะสมที่สุดของงานวิจัยนี้ในการปรับเปลี่ยนรูปร่างของปีกมีส่วนช่วยในการปรับปรุงประสิทธิภาพทางอากาศพลศาสตร์ของอากาศยานไร้คนขับที่ออกแบบได้

Huang et al., 2013 ทำการศึกษาการออกแบบด้วยการหาค่าเหมาะสมสุดวัตถุประสงค์เดียวของปีกเครื่องบินรุ่น F6 ที่มีค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศที่น้อยที่สุดเมื่อสัมประสิทธิ์แรงยกมีค่าใกล้เคียง 0.54 ด้วยการปรับความยาวของคอร์ดของปีกเครื่องบินที่บริเวณโคนปีก กลางปีก และปลายปีก โดยการเปรียบเทียบการสร้างสมการแบบจำลองทดแทนของตัวอย่างข้อมูลหลายระดับความแม่นยำด้วยวิธีครีจจิง (Kriging method) และวิธีโคครีจจิง (CO-Kriging method) ซึ่งเก็บข้อมูลระดับความแม่นยำต่ำด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขจากสมการการไหลแบบโพเทนเชียล (Potential flow) และเก็บข้อมูลระดับความแม่นยำสูงด้วยสมการนาเวียร์-สโตกส์ (Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS) equations) จากนั้นหาผลเฉลยด้วยขั้นตอนวิธีเชิงพันธุกรรม (Genetic Algorithm: GA) พบว่าการสร้างสมการแบบจำลองทดแทนของตัวอย่างข้อมูลหลายระดับความแม่นยำด้วยวิธีโคครีจจิง (CO-Kriging method) ให้คำตอบที่แม่นยำและใช้ระยะเวลาการลู่เข้าของคำตอบที่รวดเร็วกว่าวิธีครีจจิงแบบดั้งเดิม

Jin et al., 2015 ทำการออกแบบปีกของอากาศยานรุ่นใหม่เนื่องจากเป็นบริเวณที่เหนี่ยวนำให้เกิดแรงต้านอากาศมากที่สุด โดยเริ่มจากการเลือกใช้แพนอากาศสำหรับเลขเรย์โนลด์ต่ำ และใช้อัตราส่วนกว้างยาวของปีกของปีกที่มากที่สุดที่เป็นไปได้เพื่อลดการเกิดแรงต้านอากาศสำหรับอากาศยานไร้คนขับประเภทบินนานที่บินด้วยความเร็วต่ำ หลังจากนั้นทำการติดตั้งอุปกรณ์เสริมบริเวณปลายปีกแบบกวาดไปด้านหลังเพื่อลดการเกิดกระแสอากาศปั่นป่วนบริเวณปลายปีก นอกจากนี้ยังทำการปรับเปลี่ยนลักษณะของลำตัวให้เหมาะสมกับปีกที่ออกแบบ จากการปรับเปลี่ยนลักษณะของอากาศยานดังกล่าวพบว่าสามารถลดแรงต้านอากาศได้ถึง 54 % เมื่อเทียบกับอากาศยานรุ่นก่อนซึ่งการวิเคราะห์ดังกล่าวเกิดจากการคำนวณทางคอมพิวเตอร์ด้วยโปรแกรม XFOIL และ ANSYS FLUENT

ZADEH et al., 2017 สามารถทำการลดระยะเวลาการออกแบบอากาศยานไร้คนขับประเภท blended wing body โดยการลดระยะเวลาการจำลองการไหลผ่านการประยุกต์ใช้กระบวนการหาค่าเหมาะสมสุดแบบหลายความแม่นยำผ่านอัลกอริทึม Adaptive Filter Sequential Quadratic Programing (AFSQP) โดยมีวัตถุประสงค์การออกแบบคือ ค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศน้อยที่สุดภายใต้ข้อจำกัดของสัมประสิทธิ์แรงยกที่มากกว่า 0.45 และโมเมตัมการหมุนมุมเงยน้อยกว่า 0 เมื่อตัวแปรการออกแบบคือ มุมกวาดของชายหน้าปีก ความยาวปีกส่วนหลัก ความยาวปีกส่วนรองและมุมบิดของปีก

Ariyarit et al., 2017 ทำการประยุกต์กระบวนการเพิ่มประสิทธิภาพการหาค่าเหมาะสมสุดของภาพใหญ่แบบหลายวัตถุประสงค์หลายระดับความแม่นยำในการออกแบบแพนอากาศ โดยเก็บ

ข้อมูลความแม่นยำต่ำด้วยซอฟต์แวร์ XFOIL และเก็บข้อมูลความแม่นสูงด้วยวิธีพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณโดยการจำลองผ่านสมการนาเวียร์-สโตกส์ (Reynolds-averaged Navier-Stokes equations) เพื่อนำไปสร้างสมการแบบจำลองทดแทนลูกผสมระหว่างวิธีการประมาณค่าด้วยฟังก์ชันฐานหลักแนวรัศมีและวิธีครีจจิง (Hybrid Radial Basis Function/Kriging method: RBF/Kriging method) เพื่อประมาณค่าฟังก์ชันเป้าหมายของปัญหาผ่านขั้นตอนวิธีเชิงพันธุกรรมที่ใช้การคัดสรรแบบไม่ถูกครอบงำรุ่นที่ 2 (non-dominated sorting genetic algorithm II: NSGA-II) ซึ่งงานวิจัยนี้มีเป้าหมายในการออกแบบอยู่ 2 ลักษณะคือ แบบ 2 วัตถุประสงค์และแบบ 3 วัตถุประสงค์ จากนั้นนำผลที่ได้ไปเปรียบเทียบกับกลุ่มข้อมูลความแม่นยำเดียวซึ่งผลการเปรียบเทียบพบว่าการหาค่าเหมาะสมสุดของภาพใหญ่แบบหลายระดับความแม่นยำใช้เวลาการลู่เข้าของคำตอบที่รวดเร็วกว่า มีความหลากหลายของข้อมูลที่ไม่ถูกครอบงำมากกว่า และมีความแม่นยำมากกว่าการหาค่าเหมาะสมสุดของภาพใหญ่แบบความแม่นยำเดียว

Kishi et al., 2019 ทำการออกแบบปีกเครื่องบินที่บินด้วยความเร็วเหนือเสียงผ่านกระบวนการเพิ่มประสิทธิภาพของการหาค่าเหมาะสมสุดของภาพใหญ่ (Efficient Global Optimization: EGO) โดยมีวัตถุประสงค์ในการออกแบบครั้งนี้ คือ การลดสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศที่เกิดจากความดันขณะบินระดับด้วยความเท่ากับ 1.6 มัค โดยการปรับเปลี่ยนตัวแปรของความโค้งของปีก ตำแหน่งการเกิดแคมเบอร์สูงสุดของแพนอากาศ ความหนาสูงสุดของเส้นแคมเบอร์และมุมบิดของปีก การเก็บข้อมูลของงานวิจัยนี้เกิดขึ้นภายใต้ 2 ระดับความแม่นยำ คือ เก็บข้อมูลความแม่นยำต่ำด้วยการสมการ linearized compressible potential flow สำหรับบนพื้นผิวของวัตถุเท่านั้นและเก็บข้อมูลความแม่นยำสูงด้วยสมการ Compressible Euler จากนั้นทำการประมาณค่าในช่วงด้วยสมการแบบจำลองทดแทนลูกผสมระหว่างวิธีการประมาณค่าด้วยฟังก์ชันฐานหลักแนวรัศมีและวิธีครีจจิง (Hybrid Radial Basis Function/Kriging method: RBF/Kriging method) และนำไปหาค่าการปรับปรุงความคาดหวัง (Expected Improvement: EI) จากวิธีขั้นตอนเชิงพันธุกรรม ซึ่งพบว่าสามารถหาตำแหน่งของจุดตัวอย่างเพิ่มเติมสำหรับการเพิ่มความแม่นยำของการทำนายได้ และได้มาซึ่งปีกที่เหมาะสมที่สุดสำหรับการบินภายใต้เงื่อนไขที่ต้องการ

Dündar et al., 2020 ได้ทำการอธิบายขั้นตอนการออกแบบและวิเคราะห์ประสิทธิภาพของอากาศยานไร้คนขับประเภทปีกตรึงขึ้นลงแนวดิ่ง โดยชี้ให้เห็นถึงตัวแปรออกแบบที่ส่งผลอย่างมีนัยสำคัญต่อประสิทธิภาพการบินโดยเฉพาะบริเวณปีก ได้แก่ แพนอากาศ มุมลู่หลัง อัตราส่วนกว้างยาวและอัตราส่วนเรียว จากการออกแบบอากาศยานด้วยวิธีดังกล่าวพบว่าอากาศยานปีกตรึง

แบบธรรมดามีประสิทธิภาพการบินในเชิงการบินนานที่ดีกว่าอากาศยานปีกตรึงขึ้นลงแนวดิ่งแบบ 4 ใบพัด เนื่องจากอากาศยานปีกตรึงขึ้นลงแนวดิ่งสูญเสียพลังงานแบตเตอรี่อย่างมากในการขับเคลื่อนใบพัดด้วยจำนวนเครื่องยนต์ที่มากกว่าอากาศยานปีกตรึงธรรมดา

Ariyarit et al., 2020 ทำการศึกษาผลกระทบและระยะเวลาการลู่เข้าของการเพิ่มข้อมูลตัวอย่างแบบหลายค่า หลายความแม่นยำสำหรับกระบวนการเพิ่มประสิทธิภาพการหาค่าเหมาะสมสุดของภาพใหญ่ โดยใช้วิธีการสร้างสมการตัวแทนลูกผสมด้วยวิธีการประมาณค่าด้วยฟังก์ชันฐานหลักแนวรัศมีที่ผสมกับวิธีครีจจิง (Hybrid Radial Basis Function/Kriging method: RBF/Kriging method) เปรียบเทียบกับการสร้างสมการตัวแทนด้วยวิธีโคครีจจิง (CO-Krigning method) โดยการนำไปประยุกต์กับการทดสอบฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ พบว่าการสร้างสมการตัวแทนด้วยฟังก์ชันฐานหลักแนวรัศมีที่ผสมกับวิธีครีจจิงสามารถรักษาความแม่นยำของสมการการเพิ่มข้อมูลตัวอย่างแบบหลายค่าในกระบวนการเพิ่มประสิทธิภาพการหาค่าเหมาะสมสุดของภาพใหญ่ได้ในขณะที่ความแม่นยำของวิธีโคครีจจิงจะลดลงเมื่อจำนวนของข้อมูลตัวอย่างที่ใช้ในการเพิ่มแต่ละรอบเพิ่มขึ้น

Phiboon et al., 2021 ทำการประยุกต์กระบวนการเพิ่มประสิทธิภาพการหาค่าเหมาะสมสุดของภาพใหญ่ในการออกแบบแพนอากาศที่มีค่าสัมประสิทธิ์แรงยกมากที่สุดในขณะที่สัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศน้อยที่สุด ผ่านการสร้างสมการตัวแทนด้วยวิธีการประมาณค่าด้วยฟังก์ชันฐานหลักแนวรัศมีที่ผสมกับวิธีครีจจิง (Hybrid Radial Basis Function/Kriging method: RBF/Kriging method) ของข้อมูลหลายระดับความแม่นยำเพื่อลดระยะเวลาและทรัพยากรในการออกแบบขณะที่ยังสามารถรักษาความแม่นยำของข้อมูลได้ โดยเก็บข้อมูลความแม่นยำต่ำด้วยการคำนวณทางคอมพิวเตอร์ผ่านซอฟต์แวร์ JavaFoil ที่มีพื้นฐานการคำนวณมาจากทฤษฎี Panel methods และเก็บข้อมูลความแม่นยำสูงด้วยการทดลองในอุโมงค์ลม กระบวนการเพิ่มประสิทธิภาพการหาค่าเหมาะสมสุดของภาพใหญ่นี้ใช้ขั้นตอนวิธีเชิงพันธุกรรมที่ใช้การคัดสรรแบบไม่ถูกครอบงำรุ่นที่ 2 (non-dominated sorting genetic algorithm II: NSGA-II) ในการหาผลเฉลย จากการออกแบบดังกล่าวพบว่าสามารถหาลักษณะของแพนอากาศในเงื่อนไขการออกแบบที่ต้องการได้

Wang et al., 2023 ทำการเปรียบเทียบการหาค่าเหมาะสมสุดด้วยสมการทดแทน (surrogate-based optimization, SBO) กับการหาค่าเหมาะสมสุดด้วยวิธีเกรเดียนต์ (gradient-based optimization, GBO) ในการออกแบบอากาศยานเต็มลำโดยพิจารณาถึงการปรับแต่งส่วนควบคุมให้เข้าที่ (trimming) ด้วยหางแนวระดับสำหรับโมเมนต์มุมเงย จากการตั้งวัตถุประสงค์การออกแบบคือหาค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศน้อยที่สุดเมื่อสัมประสิทธิ์แรงยกเท่ากับ 0.5 พบว่าวิธี

สมการทดแทนมีประสิทธิภาพในการหารูปร่างทางอากาศพลศาสตร์ที่มากกว่าวิธีเกรเดียนต์เนื่องจากสามารถลดค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านได้มากกว่า